DIKTAT
PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA
TAHUN PELAJARAN 2005/2006

MATERI DASAR

DISUSUN OLEH :

EDDY HERMANTO, ST

SMAN 5 BENGKULU
JALAN CENDANA NOMOR 20
BENGKULU
2005

GARIS BESAR MATERI DAN SUB MATERI PADA PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA

I. TEORI BILANGAN

1.1 Uji Bilangan Habis Dibagi
   1.1.1 Bilangan habis dibagi 5
   1.1.2 Bilangan habis dibagi 2^n
   1.1.3 Bilangan habis dibagi 3 atau 9
   1.1.4 Bilangan habis dibagi 11
   1.1.5 Sifat-sifat suatu bilangan jika dibagi ab dengan a dan b relatif prima

1.2 Bilangan Kuadrat
   1.2.1 Angka satuan bilangan kuadrat
   1.2.2 Sifat-sifat jika bilangan kuadrat dibagi suatu bilangan

1.3 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)
   1.3.1 Pengertian FPB dan KPK
   1.3.2 Sifat-sifat FPB dan KPK
   1.3.3 Rumus banyaknya pembagi dari suatu bilangan

1.4 Bilangan Rasional
   1.4.1 Pengertian dan sifat bilangan rasional

1.5 Bilangan Bulat Terbesar Kurang dari Atau Sama Dengan x dan Bilangan Bulat Terkecil Lebih Dari Atau Sama Dengan x
   1.5.1 Pengertian
   1.5.2 Sifat-sifat

1.6 Teorema Kecil Fermat
   1.6.1 Pengertian dan penjelasan

II. ALJABAR

2.1 Eksponen dan Logaritma
   2.1.1 Sifat-sifat eksponen
   2.1.2 Sifat-sifat logaritma

2.2 Polinomial
   2.2.1 Persamaan Kuadrat
   2.2.2 Teorema sisa
   2.2.3 Akar-akar polinomial dan sifat-sifat akar-akar polinomial
   2.2.4 Faktor-faktor polinomial

2.3 Pembagian
   2.3.1 $a^n - b^n$ habis dibagi $a - b$ untuk n bilangan asli
   2.3.2 $a^n + b^n$ habis dibagi $a + b$ untuk n bilangan ganjil

2.4 Ketaksamaan
   2.4.1 Sifat-sifat ketaksamaan
   2.4.2 Ketaksamaan AM-GM-HM (Arithmatic Mean - Geometry Mean - Harmonic Mean)

2.5 Barisan dan Deret
   2.5.1 Barisan dan deret aritmatika
   2.5.2 Barisan dan deret geometri
   2.5.3 Prinsip Teleskopik

III. KOMBINATORIK

3.1 Teori Peluang
- 3.1.1 Kaidah perkalian
- 3.1.2 Pengertian permutasi
- 3.1.3 Pengertian kombinatorik
- 3.1.4 Permutasi Siklik
- 3.1.5 Pengambilan obyek dengan pengembalian maupun tanpa pengembalian
- 3.1.6 Pengulangan obyek

3.2 Himpunan
- 3.2.1 Pengertian 2 himpunan saling bebas
- 3.2.2 Pengertian 2 himpunan saling lepas
- 3.2.3 Himpunan bagian
- 3.2.4 Rumus gabungan 2 himpunan saling beririsan
- 3.2.5 Rumus gabungan 3 himpunan saling beririsan
- 3.2.6 Prinsip Inklusi Eksklusi (Rumus gabungan n himpunan saling beririsan)

3.3 Binom Newton
- 3.3.1 Penjabaran binom Newton
- 3.3.2 Menentukan koefisien dari variabel tertentu

3.4 Pigeon Hole Principle
- 3.4.1 Penjelasan
- 3.4.2 Contoh-contoh persoalan

IV. GEOMETRI

4.1 Segitiga
- 4.1.1 Kesebangunan 2 segitiga
- 4.1.2 Pengertian garis tinggi, garis berat, garis bagi, garis sumbu dan sifat-sifatnya
- 4.1.3 Rumus luas segitiga
- 4.1.4 Dalil sinus dan kosinus
- 4.1.5 Rumus jari-jari lingkaran luar dan lingkaran dalam suatu segitiga

4.2 Segi Empat Khusus
- 4.2.1 Pengertian persegi panjang, bujur sangkar (persegi), trapezium, jajaran genjang, belah ketupat
- 4.2.2 Rumus keliling dan luas segi empat khusus

4.3 Lingkaran
- 4.3.1 Segi empat tali busur (Pengertian dan sifat-sifat)
- 4.3.2 Garis singgung pada lingkaran (Pengertian secara geometri)

4.4 Segi n Beraturan
- 4.4.1 Panjang sisi
- 4.4.2 Luas segi-n beraturan
- 4.4.3 Sudut Dalam dan sudut luar

4.5 Dimensi Tiga

MATERI DASAR
PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA
SMAN 5 BENGKULU

TEORI BILANGAN

1. UJI HABIS DIBAGI
   a. Suatu bilangan habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhir dari bilangan tersebut adalah 0 atau 5
      Contoh : 67585 dan 457830 adalah bilangan-bilangan yang habis dibagi 5.
   b. Suatu bilangan habis dibagi 2^n jika dan hanya jika n digit terakhir dari bilangan tersebut habis dibagi 2^n.
      Contoh : 134576 habis dibagi $8 = 2^3$ sebab 576 habis dibagi 8 (576 : 8 = 72)
      4971328 habis dibagi $16 = 2^4$ sebab 1328 habis dibagi 16
   c. Suatu bilangan habis dibagi 3 jika dan hanya jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 3.
      Contoh : 356535 habis dibagi 3 sebab 3 + 5 + 6 + 5 + 3 + 5 = 27 dan 27 habis dibagi 3.
   d. Suatu bilangan habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 9.
      Contoh : 23652 habis dibagi 9 sebab 2 + 3 + 6 + 5 + 2 = 18 dan 18 habis dibagi 9.
   e. Suatu bilangan habis dibagi 11 jika dan hanya jika selisih antara jumlah digit dari bilangan tersebut pada posisi ganjil dengan jumlah digit dari bilangan tersebut pada posisi genap habis dibagi 11.
      Contoh : 945351 habis dibagi 11 sebab (9 + 5 + 5) − (4 + 3 + 1) = 11 dan 11 habis dibagi 11.
      Contoh bilangan lain yang habis dibagi 11 adalah 53713 dan 245784.

2. Jika suatu bilangan habis dibagi a dan juga habis dibagi b, maka bilangan tersebut akan habis dibagi ab dengan syarat a dan b relatif prima. Berlaku sebaliknya.
   Contoh : 36 habis dibagi 4 dan 3, maka 36 akan habis dibagi 12.

3. Misalkan N jika dibagi p akan bersisa r. Dalam bentuk persamaan N = pq + r dengan p menyatakan pembagi, q menyatakan hasil bagi dan r menyatakan sisa.
   Persamaan di atas sering pula ditulis $N \equiv r \pmod{p}$

4. Kuadrat suatu bilangan bulat bulat, habis dibagi 4 atau bersisa 1 jika dibagi 4. maka suatu bilangan bulat yang bersisa 2 atau 3 jika dibagi 4, bukanlah bilangan kuadrat. Pembuktian bisa dilakukan dengan menyatakan bahwa sebuah bilangan pasti akan termasuk salah satu dari bentuk 4k, 4k + 1, 4k + 2 atau 4k + 3 dilanjutkan dengan pengkuadratan masing-masing bentuk. Sedangkan bilangan kuadrat jika dibagi 3 akan bersisa 0 atau 1. Dan seterusnya untuk pembagi yang lain.

5. Angka satuan dari bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, 9.

6. Bilangan pangkat tiga (kubik) jika dibagi 7 akan bersisa 0, 1 atau 6. Cara pembuktian sama dengan pembuktian pada bilangan kuadrat.

7. Misalkan $M = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot p_3^{a3} \cdot \cdots p_n^{an}$ dan $N = p_1^{b1} \cdot p_2^{b2} \cdot p_3^{b3} \cdot \cdots p_n^{bn}$ maka :
   Faktor Persekutuan Terbesar dari M dan N ditulis FPB (M, N) = $p_1^{c1} \cdot p_2^{c2} \cdot p_3^{c3} \cdot \cdots p_n^{cn}$
   Kelipatan Persekutuan Terkecil dari M dan N ditulis KPK (M, N) = $p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot p_3^{d3} \cdot \cdots p_n^{bn}$
   Dengan $c_1 = \min(a_1, b_1)$; $c_2 = \min(a_2, b_2)$; $c_2 = \min(a_3, b_3)$; $\cdots$; $c_n = \min(a_n, b_n)$
   $d_1 = \text{maks}(a_1, b_1)$; $d_2 = \text{maks}(a_2, b_2)$; $c_3 = \text{maks}(a_3, b_3)$; $\cdots$; $c_n = \text{maks}(a_n, b_n)$

8. Dua bilangan dikatakan prima relatif, jika faktor persekutuan terbesarnya (FPB) sama dengan 1.
   Contoh : 26 dan 47 adalah prima relatif sebab FPB 26 dan 47 ditulis FPB(26,47) = 1

9. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua bilangan asli berurutan adalah 1.
   FPB (n, n + 1) = 1 dengan n adalah bilangan asli.

10. Jika x sebarang bilangan real, maka $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x.
    Contoh : $\lfloor \pi \rfloor = 3$; $\lfloor 0,5 \rfloor = 0$; $\lfloor -1,6 \rfloor = -2$
    Kita selalu memperoleh $(x - 1) < \lfloor x \rfloor \le x$
    Jika x sebarang bilangan real, maka $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan x.
    Contoh : $\lfloor \pi \rfloor = 4$; $\lfloor 0,5 \rfloor = 1$; $\lfloor -1,6 \rfloor = -1$
    Kita memperoleh bahwa $\lfloor x \rfloor \le \lceil x \rceil$.
    Tanda kesamaan terjadi hanya saat x adalah bilangan bulat.

11. Tanda $\lfloor \ \rfloor$ dapat digunakan untuk menentukan nilai k bulat terbesar sehingga a^k membagi n! dengan a merupakan bilangan prima dan "!" menyatakan faktorial.
    Nilai k terbesar = $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^4} \right\rfloor + \cdots$
    Contoh : k terbesar yang membuat 3^k membagi 28! = $\left\lfloor \frac{28}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{28}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{22}{3^3} \right\rfloor$ = 9 + 3 + 1 = 13.

12. Misalkan $M = p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot p_3^{d3} \cdot \cdots \cdot p_n^{dn}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ bilangan prima maka banyaknya pembagi (disebut juga dengan faktor) dari M adalah $(d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1) \cdots (d_n + 1)$.
    Contoh : Banyaknya faktor dari $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ adalah (3 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 24

13. Jika X dinyatakan oleh perkalian n bilangan bulat berurutan maka X habis dibagi n! dengan tanda "!" menyatakan faktorial.
    Contoh : $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ habis dibagi 4! = 24 karena 4, 5, 6 dan 7 adalah 4 bilangan bulat berurutan.

14. Untuk sebuah bilangan prima p dan sembarang bilangan bulat a, kita dapatkan p selalu membagi $(a^p - a)$. Ini disebut Teorema Kecil Fermat (*Fermat Little Theorem*). Penulisan dalam bentuk lain adalah $a^p - a \equiv 0 \pmod p$ atau dapat juga ditulis $a^p \equiv a \pmod p$.

15. Bilangan rasional adalah suatu bilangan yang dapat diubah ke dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b masing-masing adalah bilangan bulat.

16. $\overline{ABCDE\cdots N}$ (suatu bilangan yang terdiri dari n digit) dapat diuraikan menjadi $A\cdot10^{n-1}$ + $B\cdot10^{n-2}$ + $C\cdot10^{n-3}$ + $D\cdot10^{n-4}$ + ··· + N.
Contoh : $48573 = 4\cdot10^4 + 8\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 7\cdot10 + 3 = 40000 + 8000 + 500 + 70 + 3$

ALJABAR

1. Sisa dari pembagian p(x) oleh (x – a) adalah p(a)

2. Jika a adalah pembuat nol (atau dengan kata lain a adalah akar dari p(x) = 0) dari polinomial p(x), maka (x – a) adalah faktor dari p(x).

3. h(x) = p(x) · q(x) + s(x) dengan p(x) menyatakan pembagi, q(x) hasil bagi dan s(x) adalah sisa jika h(x) dibagi p(x).

4. Jika $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ adalah polinomial dengan pembuat nol : x_1, x_2, x_3, ···, x_n, (dengan kata lain x_1, x_2, x_3, ···, x_n adalah akar-akar p(x) = 0) maka hubungan-hubungan berikut berlaku :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \cdots + x_2x_3x_4 + x_2x_4x_5 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2x_3\cdots x_{n-1}x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

5. Untuk n bilangan ganjil, maka $(a^n + b^n)$ habis dibagi (a + b)

6. Untuk n bilangan bulat asli, maka $(a^n - b^n)$ habis dibagi (a – b)

7. (i). $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan n ∈ bilangan asli
(ii). $(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan n ∈ bilangan ganjil

8. Prinsip teleskopik

a. $\sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - a_i = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$

b. $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$

KETIDAKSAMAAN

1. Ketidaksamaan AM–GM–HM (AM ≥ GM ≥ HM)

   Jika $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$ adalah n bilangan real positif dengan rata-rata aritmatik (AM), rata-rata geometri (GM) dan rata-rata harmonik (HM), maka akan memenuhi :

   AM ≥ GM ≥ HM

   $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}}$$

2. Jika $\alpha a \leq \alpha b$ dan α adalah bilangan positif, maka $a \leq b$ sedangkan jika α bilangan negatif maka $a \geq b$.

   Jadi ketika membagi kedua ruas ketidaksamaan, kita harus memperhatikan tanda bilangan pembagi.

GEOMETRI

1. Luas dua segitiga yang panjang alasnya sama akan mempunyai perbandingan yang sama dengan perbandingan tingginya sedangkan dua segitiga yang mempunyai tinggi yang sama akan mempunyai perbandingan luas yang sama dengan perbandingan panjang alasnya.

2. Jika AB adalah diameter sebuah lingkaran dan C terletak pada lingkaran maka $\angle ACB = 90^o$.

3. Jika CD adalah tali busur suatu lingkaran yang berpusat di O maka OM dengan M adalah pertengahan CD akan tegak lurus CD.

4. Dua segitiga ABC dan DEF dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu dari pernyataan berikut :

   a. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle F$

   b. $\frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$

   c. $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ dan $\angle A = \angle D$

5. Jika D adalah titik tengah dari sisi BC pada ΔABC, maka $(AB)^2 + (AC)^2 = 2\left((AD)^2 + (BD)^2 \right)$

Teorema ini disebut dengan *Teorema Appolonius*

6. Jika ABCD adalah segiempat talibusur, maka :

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Kebalikannya jika di dalam segiempat ABCD berlaku hubungan tersebut, maka segiempat itu adalah segiempat talibusur.

7. Jika ABCD adalah segiempat tali busur dan diagonal AC berpotongan dengan diagonal BD di E maka berlaku

$$AE \cdot EC = BE \cdot ED$$

8. Garis bagi pada segitiga adalah garis yang membagi sudut suatu segitiga sama besar.

9. Garis tinggi pada segitiga adalah garis yang ditarik dari salah satu titik sudut sehingga tegak lurus sisi di hadapannya.

10. Garis berat (disebut juga dengan median) pada segitiga adalah garis yang ditarik dari salah satu titik sudut memotong pertengahan sisi di hadapannya.

11. Garis sumbu pada segitiga adalah garis yang ditarik dari pertengahan sisi dan dibuat tegak lurus sisi tersebut dan memotong sisi di hadapannya.

12. Ketiga garis bagi, ketiga garis tinggi, ketiga garis berat dan ketiga garis sumbu masing-masing akan berpotongan di satu titik.

13. Perpotongan ketiga garis bagi merupakan pusat lingkaran dalam segitiga tersebut.

14. Jika garis bagi yang ditarik dari titik A pada segitiga ABC memotong sisi BC di titik D maka berlaku $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

15. Perpotongan ketiga garis sumbu merupakan pusat lingkaran luar segitiga tersebut.

16. Perpotongan ketiga garis berat membagi ketiga garis berat tersebut masing-masing dengan perbandingan 2 : 1.

KOMBINATORIK

1. a. Aturan Jumlah

   Jika A dan B adalah dua himpunan berhingga yang saling lepas, maka :

   $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

   Secara umum : $n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_n)$

   b. Aturan Hasil Kali

   Jika A dan B adalah dua himpunan berhingga, maka : $n(A x B) = n(A) \cdot n(B)$

Secara umum : $n(A1xA_2x \cdots xA_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdots n(A_n)$

2. Prinsip Lubang Merpati (*Pigeon Hole*)
   Jika n + 1 obyek disebar secara acak ke dalam n kotak, maka paling sedikit satu kotak yang memiliki sedikitnya 2 obyek. Secara lebih umum, jika kn + 1 obyek disebar secara acak ke dalam n kotak maka paling sedikit ada satu kotak yang memiliki sedikitnya k + 1 obyek.

3. Jika A dan B adalah dua himpunan berhingga, maka :
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
   Untuk tiga himpunan berhingga :
   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
   Demikian seterusnya untuk lebih dari 3 himpunan tak berhingga

4. Beberapa sifat koefisien binomial
   a. ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$; $0 \le r \le n$
   b. ${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$; $1 \le r \le n$
   c. Jika n adalah bilangan bulat positif, maka :
   $$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^{n-r} y^r = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} y + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_nC_n y^n$$
   d. Penjumlahan koefisien
   (i) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = 2^n$
   (ii) ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots = 2^{n-1}$

5. Misalkan ada n macam obyek dan kita ingin memilih r elemen, maka banyaknya pilihan adalah ${}_nC_r$, dengan $n \ge r$.

6. Misalkan ada n macam obyek dan kita ingin memilih k elemen dibolehkan berulang (kita mengganggap bahwa setiap n macam obyek tersedia pada setiap waktu). Maka banyaknya pilihan demikian adalah ${}_{n+k-1}C_k$ dengan $n \ge k$.

7. Misalkan ada n obyek dimana k_1 obyek adalah jenis pertama (dan identik), k_2 obyek adalah jenis kedua, ⋯, k_r adalah jenis ke-r sehingga $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_r = n$. Maka banyaknya permutasi dari semua n obyek adalah $\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\cdots k_r!}$.

CONTOH-CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN

1. Ada berapa banyak diantara bilangan-bilangan 20000002, 20011002, 20022002, 20033002 yang habis dibagi 9 ?
   Solusi :
   Penjumlahan digit 20000002 = 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 4 (tidak habis dibagi 9)
   Penjumlahan digit 20011002 = 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 2 = 6 (tidak habis dibagi 9)
   Penjumlahan digit 20022002 = 2 + 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 + 2 = 8 (tidak habis dibagi 9)
   Penjumlahan digit 20033002 = 2 + 0 + 0 + 3 + 3 + 0 + 0 + 2 = 10 (tidak habis dibagi 9)
   Karena semua penjumlahan digit tidak ada yang habis dibagi 9 maka tidak ada bilangan-bilangan tersebut yang habis dibagi 9.

2. Jika a679b adalah bilangan lima angka yang habis dibagi 72, tentukan nilai a dan b.
   Solusi :
   72 = 9 · 8. Karena 9 dan 8 relatif prima maka a679b harus habis dibagi 8 dan 9. Karena a679b habis dibagi 8 maka 79b habis dibagi 8. Agar 790 + b habis dibagi 8 maka b = 2.
   Karena a6792 habis dibagi 9 maka a + 6 + 7 + 9 + 2 habis dibagi 9. Nilai a yang memenuhi hanya 3.
   Jadi bilangan tersebut adalah 36792.

3. Tentukan bilangan kuadrat 4 angka dengan angka pertama sama dengan angka kedua dan angka ketiga sama dengan angka keempat.
   Solusi :
   Misal bilangan tersebut adalah aabb.
   Nilai b yang memenuhi adalah 0, 1, 4, 5, 6, atau 9. Tetapi 11, 55, 99 jika dibagi 4 bersisa 3 sedangkan 66 jika dibagi 4 bersisa 2 yang membuat aabb tidak mungkin merupakan bilangan kuadrat. Jadi nilai b yang mungkin adalah 0 atau 4.
   Jika b = 0 maka aa00 = 10^2(10a + a) yang berakibat 10a + a harus bilangan kuadrat. Tetapi 11, 22, 33, ···, 99 tidak ada satupun yang merupakan bilangan kuadrat. Sehingga tidak mungkin b = 0.
   Jika b = 4 maka aa44 = 11(100a + 4). Karena aa44 bilangan kuadrat maka 100a + 4 habis dibagi 11. Sesuai dengan sifat bilangan habis dibagi 11 maka a + 4 − 0 habis dibagi 11. Nilai a yang memenuhi hanya 7.
   Jadi bilangan tersebut adalah 7744.

4. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (m,n) yang memenuhi persamaan $m = \frac{5n+23}{n-7}$.
   Solusi :
   Alternatif 1 :
   $$m = \frac{5n+23}{n-7} = 5 + \frac{58}{n-7}$$
   Karena m bilangan bulat maka n − 7 harus faktor dari 58. Nilai n − 7 yang memungkinkan adalah −1, 1, −2, 2, −29, 29. −58, 58 berakibat nilai n yang memenuhi adalah 6, 8, 5, 9, −22, 36, −51, 65.
   Pasangan (m, n) yang memenuhi (−53, 6), (−24, 5), (3, −22), (4, −51), (6, 65), (7, 36), (34, 9), (63, 8).

Alternatif 2 :

mn – 7m = 5n + 23 → (m – 5)(n – 7) = 58

Akibatnya (n – 7) dan (m – 5) harus faktor dari 58. Selanjutnya sama dengan cara pertama.

5. Bilangan real 2,525252··· adalah bilangan rasional, sehingga dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dimana m, n bilangan-bilangan bulat, n ≠ 0. Jika dipih m dan n yang relatif prima, berapakah m + n ?

   Solusi :

   Misal X = 2,525252··· maka 100X = 252,525252···

   100X – X = 252,525252··· – 2,525252···

   99X = 250

   $X = \frac{250}{99}$

   Karena 250 dan 99 relatif prima, maka m = 250 dan n = 99

   m + n = 349.

6. Untuk setiap bilangan real α, kita definisikan $\lfloor \alpha \rfloor$ sebagai bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan α. Sebagai contoh $\lfloor 4{,}9 \rfloor$ = 4 dan $\lfloor 7 \rfloor$ = 7. Jika x dan y bilangan real sehingga $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ = 9 dan $\lfloor \sqrt{y} \rfloor$ = 12, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$ adalah ?

   Solusi :

   Karena $\sqrt{81}$ = 9 dan $\sqrt{100}$ = 10 maka $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ = 9 dipenuhi oleh 81 ≤ x < 100

   Karena $\sqrt{144}$ = 12 dan $\sqrt{169}$ = 13 maka $\lfloor \sqrt{y} \rfloor$ = 12 dipenuhi oleh 144 ≤ y < 169

   $\lfloor y - x \rfloor_{min} = \lfloor y_{min} - x_{maks} \rfloor = \lfloor 144 - 99{,}99\cdots \rfloor = \lfloor 44{,}00\cdots 1 \rfloor$

   $\lfloor y - x \rfloor_{min} = 44$

7. Angka terakhir dari 26! Pasti 0. Tentukan banyaknya angka 0 berurutan yang terletak pada akhir bilangan 26!. (Maksud soal ini adalah 26! = ······0000. Ada berapa banyak angka nol yang terletak pada akhir bilangan tersebut).

   (Tanda "!" menyatakan faktorial. n! = 1 · 2 · 3 · ··· · n. Contoh 2! = 2 ; 3! = 6 ; 4! = 24 dan sebagainya)

   Solusi :

   26! = k · 2^p · 5^q dengan p > q.

   q terbesar = $\left\lfloor \frac{26}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{26}{5^2} \right\rfloor$ = 5 + 1 = 6.

   26! = k · 2^r · 2^6 · 5^6 = m · 10^6 dengan m tidak habis dibagi 10.

   Maka banyaknya angka nol berurutan yang terletak pada akhir bilangan 26! = 6.

   26! = ·······000000.

8. Buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6, untuk setiap bilangan bulat a.

   Solusi :

   Alternatif 1 :

   $a^9 - a = a\,(a^8 - 1)$

   $a^9 - a = a\,(a^4 - 1)\,(a^4 + 1)$

$a^9 - a = a\ (a^2 - 1)\ (a^2 + 1)\ (a^4 + 1)$

$a^9 - a = (a - 1)\ a\ (a + 1)\ (a^2 + 1)\ (a^4 + 1)$

Karena $(a - 1)\ a\ (a + 1)$ adalah perkalian 3 bilangan bulat berurutan maka $a^9 - a$ habis dibagi 3! = 6.

Alternatif 2 :

Sebuah bilangan bulat pasti akan memenuhi bahwa ia ganjil atau genap .

* Jika a genap maka a^9 adalah genap
  Maka $a^9 - a$ adalah selisih antara dua bilangan genap → a^9 a genap
* Jika a ganjil maka a^9 adalah ganjil
  Maka $a^9 - a$ adalah selisih antara dua bilangan ganjil → $a^9 - a$ genap

Karena $a^9 - a$ genap maka berarti $a^9 - a$ habis dibagi 2.

Akan dibuktikan bahwa $a^9 - a$ juga habis dibagi 3.

Alternatif 2. a :

Sebuah bilangan bulat akan memenuhi salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2

* Jika a = 3k
  $a^9 - a = 3^9k^9 - 3k = 3\ (3^8k^9 - k)$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3
* Jika a = 3k + 1
  $a^9 - a = (3k + 1)^9 - (3k + 1) = 3^9k^9 + {}_9C_1\ 3^8k^8 + {}_9C_2\ 3^7k^7 + \cdots + {}_9C_7\ 3^2k^2 + {}_9C_8\ 3k + 1 - (3k + 1)$
  $a^9 - a = 3^9k^9 + {}_9C_1\ 3^8k^8 + {}_9C_2\ 3^7k^7 + \cdots + {}_9C_7\ 3^2k^2 + 24k = 3p$
  $a^9 - a$ habis dibagi 3
* Jika a = 3k + 2
  $a^9 - a = (3k + 2)^9 - (3k + 2)$
  $a^9 - a = 3^9\ k^9 + {}_9C_1\ 3^8\ 2^1\ k^8 + {}_9C_2\ 3^7\ 2^2\ k^7 + \cdots + {}_9C_7\ 3^2\ 2^7\ k^2 + {}_9C_8\ 3k\ 2^8 + 1 - (3k + 2)$
  $a^9 - a = 3^9\ k^9 + {}_9C_1\ 3^8\ 2^1\ k^8 + {}_9C_2\ 3^7\ 2^2\ k^7 + \cdots + {}_9C_7\ 3^2\ 2^7\ k^2 + {}_9C_8\ 3k\ 2^8 + 2^9 - (3k + 2)$
  ${}_9C_8\ 3k\ 2^8 - 3k = 3k\ ({}_9C_8 \cdot 2^8 - 1)$ yang berati habis dibagi 3
  $2^9 - 2 = 512 - 2 = 510$ habis dibagi 3.
  $a^9 - a$ habis dibagi 3

Dapat disimpulkan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 3.

Alternatif 2. b :

Teorema Fermat : Untuk a bilangan bulat dan p prima maka $a^p - a$ habis dibagi p. Penulisan dalam bentuk lain adalah $a^p - a \equiv 0 \pmod p$ atau bisa juga $a^p \equiv a \pmod p$

Berdasarkan teorema Fermat maka $a^3 - a$ habis dibagi 3 dan $(a^3)^3 - a^3$ juga habis dibagi 3.

Maka $(a^3)^3 - a^3 + a^3 - a$ harus habis dibagi 3.

$(a^3)^3 - a^3 + a^3 - a = a^9 - a$ → $a^9 - a$ habis dibagi 3.

Karena 2 dan 3 relatif prima maka $a^9 - a$ habis dibagi $2 \cdot 3 = 6$

∴ Terbukti bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6 untuk setiap bilangan bulat a

9. Tentukan A dan B jika :

AB
 B +
BA

Solusi :

$(10A + B) + (B) = (10B + A)$ dengan $1 \le A \le 9$; $1 \le B \le 9$; A dan B bilangan bulat.

$9A = 8B$ → $A = 8t$ dan $B = 9t$ dengan t adalah bilangan bulat.

$1 \le 8t \le 9$ → Nilai t yang memenuhi hanya t = 1.

∴ **A = 8 dan B = 9**

10. Berapakah angka satuan dari : $2^{2005} - 2003$?
    Solusi :
    Angka satuan dari : $2^1 = 2$ adalah 2
    Angka satuan dari : $2^2 = 4$ adalah 4
    Angka satuan dari : $2^3 = 8$ adalah 8
    Angka satuan dari : $2^4 = 16$ adalah 6
    Angka satuan dari : $2^5 = 32$ adalah 2
    ⋮
    Tampak bahwa angka satuan 2^n untuk n bil. asli berulang dengan periode 4. Karena $2005 = 4 \cdot 501 + 1$, maka angka satuan dari 2^{2005} sama dengan angka satuan 2^1 yaitu 2.
    Angka satuan dari : $2^{2005} - 2003 = a2 - 3 =$ **9**

11. Suatu bilangan terdiri dari 2 angka. Bilangan tersebut sama dengan 4 kali jumlah kedua angka tersebut. Jika angka kedua dikurangi angka pertama sama dengan 2, tentukan bilangan tersebut.
    Solusi :
    Misal bilangan itu adalah ab maka $10a + b = 4(a + b)$ → $2a = b$
    $b - a = 2$ → $2a - a = 2$ → $a = 2$ dan $b = 4$
    Jadi bilangan tersebut adalah 24.

12. Suatu bilangan terdiri dari 3 angka. Bilangan tersebut sama dengan 12 kali jumlah ketiga angkanya. Tentukan bilangan tersebut.
    Solusi :
    Misal bilangan tersebut adalah abc dengan $1 \leq a \leq 9$; $0 \leq b \leq 9$; $0 \leq c \leq 9$, maka :
    $100a + 10b + c = 12 (a + b + c)$
    $88a = 2b + 11c$ → $2b = 11 (8a - c)$ ······ (1)
    Karena a, b dan c bilangan bulat, maka b kelipatan 11 atau $b = 11k$ dan $(8a - c) = 2k$.
    Karena $0 \leq b \leq 9$, maka nilai k yang memenuhi adalah $k = 0$ → $b = 0$ dan $c = 8a$
    Karena $0 \leq c \leq 9$, maka $a = 0$ (tidak memenuhi) atau $a = 1$ (memenuhi) → $c = 8 \cdot 1 = 8$.
    ∴ Bilangan tersebut adalah : **108**.

13. Diketahui bahwa $5k = n^2 + 2005$ untuk k dan n bulat serta n^2 adalah bilangan yang terdiri dari tiga digit dengan ketiga digitnya semuanya berbeda. Tentukan semua nilai n^2 yang mungkin.
    Solusi :
    Karena 5k dan dan 2005 habis dibagi 5 maka n^2 habis dibagi 5 yang berakibat n habis dibagi 5.
    n tidak akan habis dibagi 10 sebab akan membuat dua angka terakhirnya 00.
    $n^2 < 1000$ → $n < 34$
    Nilai n yang mungkin adalah 15 atau 25.
    Karena $15^2 = 225$ yang membuat terdapat dua digit yang sama maka $n^2 = 25^2 = 625$ sebagai satu-satunya nilai n^2 yang memenuhi.

14. Diketahui $a + p \cdot b = 19452005$ dengan a dan b masing-masing adalah bilangan ganjil serta diketahui bahwa $1945 \leq p \leq 2005$. Ada berapa banyak nilai p bulat yang mungkin memenuhi persamaan tersebut ? (Catatan : 19452005 adalah bilangan asli terdiri dari 8 angka)

Solusi :

Karena 19452005 adalah bilangan ganjil dan a serta b ganjil maka p harus genap.

Bilangan genap yang terletak di antara 1945 dan 2005 ada sebanyak $\frac{2005-1945}{2}$ = 30.

15. Manakah yang lebih besar : 2^{175} atau 5^{75} ? Buktikan

Solusi :

$2^{175} = (2^7)^{25} = 128^{25}$ dan $5^{75} = (5^3)^{25} = 125^{25}$

$128^{25} > 125^{25}$

$2^{175} > 5^{75}$

$\therefore$ 2^{175} lebih besar dari 5^{75}

16. Misal f adalah suatu fungsi yang memetakan dari bilangan bulat positif ke bilangan bulat positif dan didefinisikan dengan : f(ab) = b·f(a) + a·f(b). Jika f(10) = 19 ; f(12) = 52 dan f(15) = 26. Tentukan f(8).

Solusi :

f(120) = f(10 · 12) = 12f(10) + 10f(12) = 12 · 19 + 10 · 52 = 748 ····· (1)

f(120) = f(8 · 15) = 8f(15) + 15f(8) = 8 · 26 + 15f(8) = 208 + 15f(8) ····· (2)

748 = 208 + 15f(8)

$\therefore$ **f(8) = 36**

17. Jika $y = \frac{3-x}{7x+1945}$ mempunyai arti y dinyatakan dalam x. Dari persamaan tersebut tentukan x dinyatakan dalam y.

Solusi :

7yx + 1945y = 3 − x

7yx + x = 3 − 1945y

x(7y + 1) = 3 − 1945y

$$x = \frac{3-1945y}{7y+1}$$

18. Misalkan bahwa $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ dan bahwa f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5). Berapakah nilai a ?

Solusi :

Misal f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = k

Dibentuk persamaan polinomial :

$g(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k$

$g(x) = f(x) - k$

Jelas bahwa g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = g(5) = 0

Berarti bahwa 1; 2; 3; 4 dan 5 adalah akar-akar persamaan polinomial g(x) = 0.

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{B}{A} = -\frac{a}{1} = -a$

Karena akar-akarnya adalah 1; 2; 3; 4 dan 5 maka :

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = − a → a = −15

19. Jika α, β dan γ adalah akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$ tentukan $\frac{1+\alpha}{1-\beta}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

    Solusi :

    $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{B}{A} = 0$

    $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = \frac{C}{A} = \frac{-1}{1} = -1$

    $\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A} = -\frac{(-1)}{1} = 1$

    $$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+(1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma)+(1+\gamma)(1-\alpha)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

    $$= \frac{3-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma}{1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma}$$

    $$= \frac{3-(0)-(-1)+3(1)}{1-(0)+(-1)-(1)}$$

    $$= -7$$

20. Buktikan bahwa 7, 13 dan 181 adalah faktor dari $3^{105} + 4^{105}$.

    Solusi :

    Karena 105 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 3 + 4 = 7.

    $3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35} = 27^{35} + 64^{35}$

    Karena 35 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 27 + 64 = 91. Karena 91 = 7 · 13 maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 13.

    $3^{105} + 4^{105} = (3^5)^{21} + (4^5)^{21} = 243^{21} + 1024^{21}$

    Karena 21 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 243 + 1024 = 1267. Karena 1267 = 7 · 181 maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 181.

21. Untuk sebarang bilangan real a, b, c buktikan ketaksamaan $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$ dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

    Solusi :

    $(a - b)^2 \geq 0$ → $a^2 + b^2 \geq 2ab$

    Pertidaksamaan di atas dapat diperoleh pula dari pertidaksamaan AM-GM

    $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$ → $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .... (1)

    Kesamaan terjadi bila a = b

    Berdasarkan persamaan (1) didapat :

    $a^2 + c^2 \geq 2ac$ .... (2)

    $b^2 + c^2 \geq 2bc$ .... (3)

    (1) + (2) + (3) → $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ → $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$ .... (4)

    Bilangan kuadrat bernilai ≥ 0 maka :

    $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ .... (5)

    Kesamaan terjadi hanya jika a = 0, b = 0 dan c = 0

(4) + (5) → $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \ge 4ab + 4ac + 4bc$

Kesamaan terjadi hanya jika a = b = c = 0

∴ **Terbukti bahwa $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \ge 4ab + 4ac + 4bc$**

22. Untuk a, b dan c bilangan positif, buktikan pertidaksamaan (a + b)(b + c)(c + a) ≥ 8abc.

Solusi :

AM ≥ GM → $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ → $a + b \ge 2\sqrt{ab}$

Maka $a + c \ge 2\sqrt{ac}$ dan $b + c \ge 2\sqrt{bc}$

$(a + b)(a + c)(b + c) \ge 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc}$

(a + b)(b + c)(c + a) ≥ 8abc (terbukti)

23. Hitunglah nilai $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2004\cdot 2005} + \frac{1}{2005\cdot 2006}$.

Solusi :

Soal di atas merupakan contoh prinsip teleskopik.

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad ; \quad \cdots\cdots\cdots \quad ; \quad \frac{1}{2005\cdot 2006} = \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2004\cdot 2005} + \frac{1}{2005\cdot 2006} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdots + \left(\frac{1}{2005} - \frac{1}{2006}\right)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2004\cdot 2005} + \frac{1}{2005\cdot 2006} = \left(1 - \frac{1}{2006}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2004\cdot 2005} + \frac{1}{2005\cdot 2006} = \frac{2005}{2006}$$

24. $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2003}\right)\left(1-\frac{1}{2005}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2004}\right)\left(1+\frac{1}{2006}\right) = \cdots$

Solusi :

Misal S = $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2005}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2006}\right)$

S = $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2004}{2005}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2007}{2006}$

S = $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2004}{2005}\cdot\frac{2005}{2004}\cdot\frac{2007}{2006}$

S = $\frac{2007}{2006}$

25. Tomi melakukan perjalanan dari kota A ke kota B dengan mobil. Jika jalanan menanjak, Tomi memacu mobilnya dengan kecepatan 40 km/jam sedangkan jika jalanan menurun Tomi memacu kendaraannya dengan kecepatan 60 km/jam. Jalanan dari kota A ke kota B hanya jalanan menanjak atau menurun saja

serta tidak ada jalanan yang mendatar. Jika Tomi membutuhkan waktu dari kota A ke kota B lalu kembali lagi ke kota A dalam waktu 5 jam tanpa istirahat, maka berapa km jarak kota B dari kota A ?

Solusi :

Misal Jarak jalan menanjak dari A ke B = x dan jarak jalan menurun dari A ke B = y.

$$5 = \frac{x}{40} + \frac{y}{60} + \frac{y}{40} + \frac{x}{60}$$

$$5 = \frac{x+y}{40} + \frac{x+y}{60}$$

5 · 40 · 60 = (40 + 60)(x + y)

x + y = 120

Jarak dari B ke kota A = 120 km

26. Empat buah titik berbeda terletak pada satu garis lurus. Jarak antara sebarang dua titik dapat diurutkan menjadi barisan 1, 4, 5, k, 9, 10. Tentukan nilai k.

Solusi :

Misal garis tersebut terletak pada sumbu X.

Angap titik A adalah titik paling kiri, D paling kanan serta B dan C terletak di antara A dan D.

Titik A berada pada x = 0 → D berada pada koordinat x = 10.

Karena ada yang berjarak 1 maka salah satu B atau C akan berada di x = 1 atau x = 9

Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan titik tersebut adalah B.

- B terletak pada x = 1

  Jarak B dan D = 9

  Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi C ada di x = 4, 5 atau 6.

  Posisi C tidak mungkin di x = 4 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.

  Posisi C tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)

  Maka posisi C ada di x = 6 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10

  k = 6

- B terletak pada x = 9

  Jarak B dan A = 9

  Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi C ada di x = 4, 5 atau 6.

  Posisi C tidak mungkin di x = 6 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.

  Posisi C tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)

  Maka posisi C ada di x = 4 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10

  k = 6

27. Sebuah bujur sangkar ukuran 5 x 5 dibagi menjadi 25 bujur sangkar satuan. Masing-masing bujur sangkar satuan akan diisi dengan bilangan 1, 2, 3, 4 atau 5. Pada masing-masing baris, kolom dan dua diagonal utama (dari kanan atas ke kiri bawah dan dari kiri atas ke kanan bawah) kelima bujur sangkar satuan tersebut harus diisi oleh bilangan yang berbeda. Lihat diagonal utama dari kiri atas ke kanan bawah. Perhatikan 4 buah bujur sangkar satuan di bawah diagonal tersebut yang juga membentuk diagonal. Buktikan bahwa jumlah keempat bilangan pada bujur sangkar tersebut tidak akan sama dengan 20.

Solusi :

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Y

Andaikan keempat bilangan tersebut = 20 → F + L + R + X = 20 yang hanya dapat dipenuhi jika F = L = R = X = 5.
Pada kolom ke-5 harus terdapat satu bilangan 5. Akibatnya E = 5.
Karena dalam masing-masing kolom hanya terdapat satu bilangan 5, maka banyaknya bilangan 5 ada tepat sebanyak 5.
Tetapi pada diagonal utama dari kiri atas ke kanan bawah belum terdapat bilangan 5 sedangkan bilangan 5 telah terdapat sebanyak 5 (kontradiksi).
Maka tidak mungkin F + L + R + X = 20.

28. Jika bentuk pangkat $(a + b + c + d + e)^7$ diekspansikan menjadi suku-sukunya, maka tentukan koefisien dari a^2cd^3e.
Solusi :
$(a + b + c + d + e)^7 = (a + (b + c + d + e))^7$
maka koefisien dari $a^2(b + c + d + e)^5$ adalah ${}_7C_2$ sehingga :
$(a + b + c + d + e)^7 = \cdots + {}_7C_2\, a^2(b + c + d + e)^5 + \cdots$
$(a + b + c + d + e)^7 = \cdots + {}_7C_2\, a^2\, {}_5C_0\, b^0\, (c + d + e)^5 + \cdots$
$(a + b + c + d + e)^7 = \cdots + {}_7C_2\, {}_5C_0\, a^2\, {}_5C_1\, c^1\, (d + e)^4 + \cdots$
$(a + b + c + d + e)^7 = \cdots + {}_7C_2\, {}_5C_0\, {}_5C_1\, a^2c\, {}_4C_3\, d^3e + \cdots$
$(a + b + c + d + e)^7 = \cdots + {}_7C_2\, {}_5C_0\, {}_5C_1\, {}_4C_3\, a^2cd^3e + \cdots$
Koefisien dari a^2cd^3e adalah ${}_7C_2\, {}_5C_0\, {}_5C_1\, {}_4C_3 = 21 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4$
$\therefore$ Koefisien dari a^2cd^3e = **420**

29. Di dalam sebuah kotak terdapat 4 bola yang masing-masing bernomor 1, 2, 3 dan 4. Tomi mengambil bola secara acak lalu mencatat nomornya dan mengembalikkan bola tersebut ke dalam kotak. Hal yang sama ia lakukan sebanyak 4 kali. Misalkan jumlah keempat nomor bola yang diambilnya sama dengan 12. Ada berapa banyak cara ia mendapatkan hal tersebut ?
Solusi :
Alternatif 1 :
Kemungkinan empat jenis bola yang terambil adalah :
- Keempat bola tersebut adalah (1, 3, 4, 4)
  Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12
  Semua kemungkinannya adalah (1, 3, 4, 4) ; (1, 4, 3, 4) ; (1, 4, 4, 3) ; (3, 1, 4, 4) ; (3, 4, 1, 4) ; (3, 4, 4, 1) ; (4, 1, 3, 4) ; (4, 1, 4, 3) ; (4, 3, 1, 4) ; (4, 3, 4, 1) ; (4, 4, 1, 3) ; (4, 4, 3, 1)
- Keempat bola tersebut adalah (2, 3, 3, 4)
  Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12

Semua kemungkinannya adalah (2, 3, 3, 4) ; (2, 3, 4, 3) ; (2, 4, 3, 3) ; (3, 2, 3, 4) ; (3, 2, 4, 3) ; (3, 3, 2, 4) ; (3, 3, 4, 2) ; (3, 4, 2, 3) ; (3, 4, 3, 2) ; (4, 2, 3, 3) ; (4, 3, 2, 3) ; (4, 3, 3, 2)

- Keempat bola tersebut adalah (2, 2, 4, 4)

  Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ = 6

  Semua kemungkinannya adalah (2, 2, 4, 4) ; (2, 4, 2, 4) ; (2, 4, 4, 2) ; (4, 2, 2, 4) ; (4, 2, 4, 2) ; (4, 4, 2, 2)

- Keempat bola tersebut adalah (3, 3, 3, 3)

  Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{4!}$ = 1

  Semua kemungkinannya adalah (3, 3, 3, 3)

Total banyaknya kemungkinan adalah 12 + 12 + 6 + 1 = 31

Alternatif 2 :

Dengan cara mendaftar semua kemungkinanya.

30. Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan pemuda internasional terdiri dari 5 orang. Ada 7 orang pria dan 5 orang wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota itu harus wanita, banyaknya cara memilih anggota delegasi adalah ····

    Solusi :

    Susunan delegasi yang mungkin adalah 4 pria dan 1 wanita atau 3 pria dan 2 wanita atau 2 pria dan 3 wanita atau 1 pria dan 4 wanita atau 5 wanita .

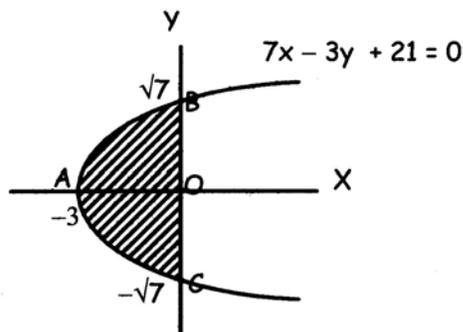
    Banyaknya cara memilih anggota delegasi adalah ${}_7C_4 \cdot {}_5C_1 + {}_7C_3 \cdot {}_5C_2 + {}_7C_2 \cdot {}_5C_3 + {}_7C_1 \cdot {}_5C_4 + {}_7C_0 \cdot {}_5C_5$ = $35 \cdot 5 + 35 \cdot 10 + 21 \cdot 10 + 7 \cdot 5 + 1 \cdot 1$ = 175 + 350 + 210 + 35 + 1 = 771 cara.

    ∴ Banyaknya cara memilih anggota delegasi ada **771.**

31. Tiga buah titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$. Buktikan bahwa sedikitnya dua di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.

    Solusi :

    $x - 3y^2 + 21 = 0$ → $7x = 3y^2 - 21$ → $x = \frac{3}{7}\left(y+\sqrt{7}\right)\left(y-\sqrt{7}\right)$

    merupakan suatu persamaan parabola dengan puncak di (–3,0) dan titik potong dengan sumbu Y di (0,√7) dan (0,–√7). Tampak bahwa ada 2 daerah. Satu daerah di atas sumbu X dan satu daerah lagi di bawah sumbu X.

Jarak AB = $\sqrt{(-3-0)^2 + (0-\sqrt{7})^2} = 4$

Jarak AC = $\sqrt{(-3-0)^2 + (0-(-\sqrt{7}))^2} = 4$

Untuk $0 \le y \le \sqrt{7}$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan B dengan jarak AB = 4.

Untuk $-\sqrt{7} \le y \le 0$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan C dengan jarak AC = 4.

Karena ada 3 buah titik dan ada 2 daerah maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka sekurang-kurangnya ada 2 titik dalam satu daerah yaitu memiliki ordinat $0 \le y \le \sqrt{7}$ atau $-\sqrt{7} \le y \le 0$.

$\therefore$ **Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika 3 titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu Y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$, maka sedikitnya 2 titik di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.**

32. Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P diantara kedua garis. Jika AB = 4 dan CD = 12, berapa jauh P dari garis CD ?

Solusi :

Dibuat garis EF tegak lurus AB maupun CD serta melalui titik P.

Karena $\angle$CPD = $\angle$APB dan AB sejajar dengan CD, maka ΔAPB kongruen dengan ΔCPD.

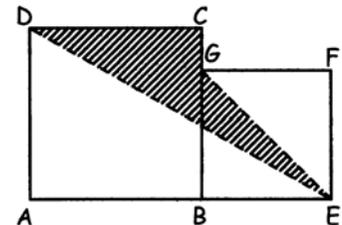
$$\frac{EP}{PF} = \frac{CD}{AB} = \frac{12}{4} = 3$$

$$PF = \frac{1}{3} \cdot EP \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

EP + PF = 4

$$EP + \frac{1}{3} \cdot EP = 4$$

$\therefore$ EP = 3 satuan

33. Perhatikan gambar. ABCD dan BEFG masing-masing adalah persegi (bujur sangkar) dengan panjang sisi 8 dan 6. Tentukan luas daerah yang diarsir.

Solusi :

Alternatif 1 :

Luas arsir = Luas ABCD + Luas BEFG – Luas ΔADE – Luas ΔEGF

Luas arsir = $8^2 + 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 14 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6$

Luas arsir = 64 + 36 – 56 – 18

Luas arsir = 26

Alternatif 2 :

Misal garis DE berpotongan dengan BG di H

$$\frac{AD}{AE} = \frac{HB}{BE} \rightarrow \frac{8}{14} = \frac{HB}{6} \rightarrow HB = \frac{24}{7} \rightarrow CH = 8 - HB = \frac{32}{7} \rightarrow GH = 6 - HB = \frac{18}{7}$$

Luas arsir = Luas ΔDCH + Luas ΔEGH

Luas arsir = $\frac{1}{2} \cdot DC \cdot CH + \frac{1}{2} \cdot GH \cdot BE$

Luas arsir = $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{32}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{7} \cdot 6$

Luas arsir = 26

34. Diketahui $\triangle$ABC dengan AC = 2BC = 10 cm. Dari titik C dibuat garis bagi sudut ACB, sehingga memotong AB di titik D. Dibuat garis DE tegak lurus pada AB, sehingga BC = EB. Dari titik D dibuat garis tegak lurus pada EB dan memotong EB di titik F. Jika panjang AD = 8 cm. Hitunglah panjang EF.

Solusi :

Karena CD adalah garis bagi maka $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$ → DB = 4 cm

Karena BE = BC = 5 cm dan DB = 4 cm maka DE = 3 cm.

Alternatif 1 :

ΔEFD sebangun dengan ΔBDE (sering ditulis dengan $\Delta EFD \cong \Delta BDE$)

$\frac{EF}{DE} = \frac{DE}{BE}$ → $\frac{EF}{3} = \frac{3}{5}$

EF = 1,8 cm

Alternatif 2 :

Luas ΔBDE = ½ BE · DF = ½ DE · BD → (5) (DF) = (3)(4) → DF = $\frac{12}{5}$ cm

$$EF = \sqrt{(DE)^2 - (DF)^2} = \sqrt{(3)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{15^2 - 12^2}{5^2}}$$

EF = 1,8 cm

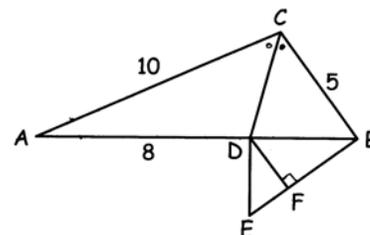
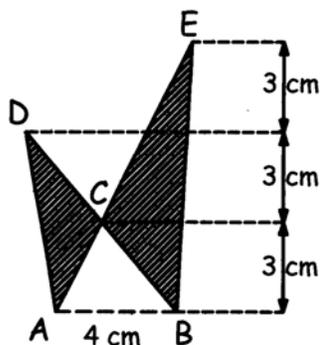
Alternatif 3 :

$(DF)^2 = (DE)^2 - (EF)^2 = (BD)^2 - (BF)^2$ → $(BF)^2 - (EF)^2 = (BD)^2 - (DE)^2$

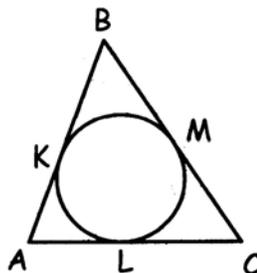
$(BE - EF)^2 - (EF)^2 = (BD)^2 - (DE)^2 = 4^2 - 3^2 = 7$

$5^2 - 10(EF) + (EF)^2 - (EF)^2 = 7$

$25 - 10(EF) = 7$

EF = 1,8 cm

35. Hitunglah luas daerah yang diarsir

Solusi :

Luas daerah yang diarsir = Luas ΔABD + Luas ΔABE − 2 · Luas ΔABC
= ½ · 4 · 6 + ½ · 4 · 9 − 2 · ½ · 4 · 3
= (12 + 18 − 12) cm^2
= **18 cm^2**

36. ABC adalah sebuah segitiga dengan panjang AB = 6. Dibuat sebuah lingkaran dalam yang menyinggung sisi AB di K, AC di L dan BC di M (lihat gambar). Jika panjang LC = 5, tentukan keliling segitiga ABC.

Solusi :

Perhatikan bahwa CM = CL, BM = BK dan AL = AK

Keliling ΔABC = BK + KA + AL + LC + CM + MB

Keliling ΔABC = BK + KA + KA + LC + LC + BK

Keliling ΔABC = 2(BK + KA) + 2LC

Keliling ΔABC = 2AB + 2LC = 2 · 6 + 2 · 5

Keliling ΔABC = 22

37. Pada segitiga ABC diketahui panjang AC = 5, AB = 6 dan BC = 7. Dari titik C dibuat garis tegak lurus sisi AB memotong sisi AB di titik D. Tentukan panjang CD.

Solusi :

Alternatif 1 :

Misalkan panjang AD = x → BD = 6 − x

$CD^2 = AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$5^2 - x^2 = 7^2 - (6 - x)^2$

$24 = 36 - 12x + x^2 - x^2$ → $x = 1$

$CD^2 = 5^2 - 1^2$

CD = $2\sqrt{6}$

Alternatif 2 :

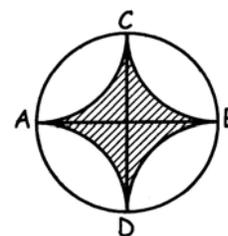
s = ½ (5 + 6 + 7) = 9

Luas ΔABC = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$

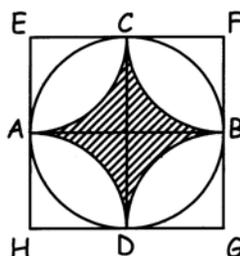
Luas ΔABC = ½ · AB · CD = 3CD

3 · CD = $6\sqrt{6}$

CD = $2\sqrt{6}$

38. Perhatikan gambar. AB dan CD adalah diameter lingkaran dengan AB = CD = 8 serta AB dan CD saling tegak lurus. Busur AC, CB, BD dan DA adalah 4 busur yang kongruen dengan dua busur yang berdekatan saling bersinggungan. Tentukan luas daerah yang diarsir. (Jawaban boleh dinyatakan dalam π. Ingat bahwa $\pi \neq \frac{22}{7}$ maupun 3,14.)

Solusi :

Alternatif 1 :

Buat persegi EFGH dengan A, B, C dan D adalah pertengahan sisi-sisinya.

$\text{Luas}_{\text{arsir}} = \text{Luas}_{\text{persegi EFGH}} - 4 \cdot \text{Luas}_{1/4\ \text{lingkaran}}$

$\text{Luas}_{\text{arsir}} = 8 \cdot 8 - 4\ (\frac{1}{4}\ \pi\ 4^2)$

$\text{Luas}_{\text{arsir}} = 64 - 16\pi$

Alternatif 2 :

Misal perpotongan garis AB dan CD di titik O

$\text{Luas}_{\text{tembereng AC}} = \text{Luas}_{1/4\ \text{lingkaran}} - \text{Luas}\ \Delta AOC$

$\text{Luas}_{\text{tembereng AC}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$

$\text{Luas}_{\text{tembereng AC}} = 4\pi - 8$

Luas arsir = Luas lingkaran − 8 · Luas tembereng

Luas arsir = $\pi \cdot 4^2 - 8 \cdot (4\pi - 8)$

Luas arsir = $64 - 16\pi$

KUMPULAN SOAL
MATERI DASAR
OLIMPIADE MATEMATIKA
BIDANG TEORI BILANGAN

Sumber :

1. **Mu Alpha Theta National Convention : Denver 2001 Number Theory Topic Test**
2. **Alabama State-Wide Mathematics Contest Cliphering Question**

1. Yang manakah di antara bilangan berikut yang memenuhi bersisa 1 jika dibagi 3 ?
A. 330 B. 331 C. 332 D. 333 E. Tidak ada

2. Tentukan jumlah 100 bilangan asli pertama yang bukan bilangan kuadrat.
A. 3080 B. 5720 C. 6105 D. 6250 E. Tidak ada

3. Tentukan nilai terbesar n sehingga 3^n membagi 311!
A. 103 B. 152 C. 153 D. 155 E. Tidak ada

4. N adalah bilangan bulat positif dan memenuhi jika dibagi 3 bersisa 2 dan jika dibagi 2 bersisa 1. Berapakah sisanya jika N dibagi 6 ?
A. 5 B. 3 C. 2 D. 1 E. Tidak ada

5. Tentukan bilangan terkecil yang merupakan kelipatan 13 dan satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 7.
A. 39 B. 52 C. 65 D. 78 E. Tidak ada

6. Berapa banyakkah akhiran angka 0 berturut-turut yang dimiliki oleh 134! ?
A. 26 B. 31 C. 32 D. 37 E. Tidak ada

7. Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki faktor sebanyak 12.
A. 60 B. 72 C. 84 D. 90 E. Tidak ada

8. Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki faktor sebanyak 12 yang tidak habis dibagi 3.
A. 136 B. 140 C. 160 D. 220 E. Tidak ada

9. Berapakah penjumlahan semua faktor dari 84 ?
A. 112 B. 128 C. 224 D. 432 E. Tidak ada

10. Yang manakah di antara bilangan-bilangan berikut ini yang relatif prima terhadap yang lain ?
A. 221 B. 1001 C. 1728 D. 2737 E. Tidak ada

11. Jika 10a bersisa 1 jika dibagi 13 (persoalan ini kadang-kadang ditulis dengan $10a \equiv 1 \pmod{13}$), maka berapakah sisanya jika 17a dibagi 13 ?
A. 1 B. 3 C. 9 D. 12 E. Tidak ada

12. Sebuah bilangan 4 angka 6A6A habis dibagi 72. Berapakah penjumlahan semua angka yang mungkin dari A ?
A. 2 B. 7 C. 9 D. 11 E. Tidak ada

13. Jika 3x bersisa 4 jika dibagi 5 dan 5x dibagi 7 bersisa 6, yang manakah di antara bilangan-bilangan berikut yang mungkin merupakan x ?
A. 19 B. 34 C. 53 D. 630 E. Tidak ada

14. Tentukan bilangan terkecil yang memenuhi sifat bersisa 1 jika dibagi oleh 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
A. 209 B. 839 C. 629 D. 2519 E. Tidak ada

15. Jumlah n bilangan asli pertama sama dengan S dimana S habis dibagi 183. Tentukan nilai terkecil dari n.
A. 60 B. 61 C. 182 D. 183 E. Tidak ada

16. Tentukan angka puluhan dari 7^{707}.
A. 0 B. 4 C. 7 D. 9 E. Tidak ada

17. Yang manakah di antara bilangan-bilangan berikut yang habis dibagi 99 ?
A. 5256 B. 7018 C. 18623 D. 32571 E. Tidak ada

18. Hasil kali dua bilangan asli adalah 9984. Nilai selisih positif terkecil dari kedua bilangan tersebut adalah ·····
A. 2 B. 4 C. 6 D. 8 E. Tidak ada

19. Kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari tiga bilangan 297, 481 dan 672 adalah ······
A. 32032 B. 31999968 C. 864864 D. 63999936 E. Tidak ada

20. Berapakah sisanya jika 5^{301} dibagi 8 ?
A. 1 B. 3 C. 5 D. 7 E. Tidak ada

21. Jika M adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari 20 bilangan asli pertama, maka banyaknya faktor positif dari M adalah ······
A. 960 B. 1120 C. 1200 D. 1728 E. Tidak ada

KUMPULAN SOAL
MATERI DASAR
OLIMPIADE MATEMATIKA
BIDANG ALJABAR

1. Jika bilangan 6 angka A8787B habis dibagi 144, maka tentukan nilai A dan B yang mungkin ?

2. Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki faktor sebanyak 14.

3. Tentukan penjumlahan semua faktor-faktor positif dari 2004.

4. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan
$$\left(\sqrt{4\sqrt{x}-\sqrt{12x+\sqrt{8x-1}}}\right)\left(\sqrt{4\sqrt{x}+\sqrt{12+\sqrt{8x-1}}}\right)\left(\sqrt{4x+\sqrt{8x-1}}\right)=15$$

5. Buktikan bahwa $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + 4^{2001} + \cdots + 2001^{2001}$ merupakan bilangan kelipatan 13.

6. Jika diketahui nilai $\sqrt{14y^2-20y+48}+\sqrt{14y^2-20y-15}=9$ maka berapakah nilai dari $\sqrt{14y^2-20y+48}-\sqrt{14y^2-20y-15}$?

7. Berapakah penjumlahan semua bilangan prima yang memenuhi 1 lebihnya dari bilangan kelipatan 4 dan 1 kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 5.

8. Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat : bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi oleh 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Tentukan N.

9. Bilangan 13! Jika dituliskan akan menjadi A22B020C00. Tentukan nilai A, B dan C.

10. Untuk n bilangan cacah buktikan bahwa $n^5 - n$ habis dibagi 30.

11. Selesaikan sistem persamaan berikut :
$$\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{yz}{y+z}=\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{xz}{x+z}=\frac{1}{7}$$

KUMPULAN SOAL
MATERI DASAR
OLIMPIADE MATEMATIKA
BIDANG KOMBINATORIK

Sumber :

1. **Mu Alpha Theta National Convention 2003 : Probability/Permutations/Combinations**
2. **Mu Alpha Theta National Convention 2003 : Alpha Probability**

1. Dari 15 anggota sebuah organisasi akan diambil 2 orang yang akan mewakili organisasi tersebut ke suatu pertemuan. Berapa banyak susunan berbeda dari perwakilan organisasi
   A. 15! B. ${}_{15}P_2$ C. ${}_{15}C_2$ D. (15)(2) E. Tidak ada

2. Sebuah perusahaan di bidang memperkerjakan 25 insinyur dan 10 orang agen penjualan. Sebuah komite yang terdiri dari 3 insinyur dan dan 2 agen penjualan dibentuk untuk membahas produk baru. Berapa banyak susunan komite yang dapat dibentuk ?
   A. 13890 B. 103500 C. 324632 D. 1242000 E. Tidak ada

3. Pada sebuah negara plat kendaraan terdiri dari 2 angka diikuti 3 abjad. Anggap bahwa angka 0 boleh ditaruh di muka. Berapakah maksimum jumlah plat yang dapat dibuat di negara tersebut ?
   A. 1757600 B. 1423656 C. 1404000 D. 1265625 E. Tidak ada

4. Tentukan nilai ${}_nP_3$ jika diketahui ${}_nC_3$ = 12n.
   A. 720 B. 210 C. 120 D. 35 E. Tidak ada

5. Dua bilangan bulat positif dipilih secara acak. Berapakah peluang bahwa perkalian kedua bilangan tersebut menghasilkan bilangan genap ?
   A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1 E. Tidak ada

6. Ada berapa banyak jalan jika huruf-huruf pada MUALPHATHETA disusun ?
   A. 479001600 B. 79833600 C. 399116800 D. 19958400 E. Tidak ada

7. Tentukan banyaknya diagonal pada segi 10.
   A. 10 B. 18 C. 28 D. 35 E. Tidak ada

8. Tiga buah dadu dilempar. Tentukan peluang munculnya jumlah mata dadu tidak lebih dari 16.
   A. $\frac{1}{108}$ B. $\frac{1}{54}$ C. $\frac{103}{108}$ D. $\frac{53}{54}$ E. Tidak ada

9. Ada berapa banyak bilangan ganjil yang dapat dibentuk dengan menggunakan angka-angka 2, 3, 5 dan 7 jika angka-angka tersebut tidak boleh diulang ?
   A. 18 B. 27 C. 36 D. 45 E. Tidak ada

10. Himpunan S adalah {#, !, @, *, $, %}. Berapa banyak himpunan bagian dari S yang tidak kosong ?
    A. 6 B. 63 C. 64 D. 127 E. Tidak ada

11. Tentukan konstanta dari penjabaran bentuk $\left(x-\frac{2}{x^2}\right)^9$

A. 672 B. 84 C. 1 D. −84 E. Tidak ada

12. Jika faktor positif dari 2010 diambil secara acak, berapakah peluang yang terambil adalah bilangan bulat ?

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{16}$ E. Tidak ada

13. Dari 10 ekor anjing pada sebuah tempat terdapat 5 anjing betina dan 3 anjing berwarna hitam. Diketahui bahwa seperlima anjing adalah jantan hitam. Jika seekor anjing dipilih secara acak berapakah peluang terambilnya anjing betina yang tidak berwarna hitam ?

A. 0,1 B. 0,2 C. 0,3 D. 0,4 E. Tidak ada

14. Jika ${}_aC_5 = {}_aC_7$ dan b = ${}_aP_2$, tentukan nilai a + b.

A. 4 B. 78 C. 144 D. 1325 E. Tidak ada

15. Pada sebuah kota, nomor telepon terdiri dari 7 angka. Angka 0 diperbolehkan ditaruh di muka. Berapakah peluang bahwa ketujuh angkanya berurutan (bisa naik atau tutun) ? Contoh nomor telepon tersebut adalah 1234567 ; 8765432.

A. $\frac{8}{10^7}$ B. $\frac{6}{10^7}$ C. $\frac{4}{10^7}$ D. $\frac{3}{10^7}$ E. Tidak ada

16. Jika x dan y adalah dua buah bilangan positif lebih dari 0 tapi kurang dari 4, berapakah peluang bahwa jumlah x dan y kurang dari 2 ?

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$ E. Tidak ada

17. Sebuah kartu diambil dari tumpukan kartu bridge. Berapakah peluang yang terambilnya adalah kartu 3 atau king ?

A. $\frac{1}{52}$ B. $\frac{1}{26}$ C. $\frac{1}{13}$ D. $\frac{2}{13}$ E. Tidak ada

18. Nama-nama 18 buah poligon beraturan ditulis pada sebuah kartu. Satu poligon satu kartu. Nama-nama poligon tersebut adalah segitiga sama sisi, persegi, segi-5 beraturan, segi-6 beraturan sampai dengan kaartu yang ke-18 yaitu segi-20 beraturan. Jika sebuah kartu diambil dari tumpukan ini, berapakah peluang yang terambil adalah kartu yang bertuliskan nama poligon yang sudut dalamnya bukan bilangan bulat dengan sudut dinyatakan dalam derajat ?

A. $\frac{7}{20}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{11}{20}$ D. 1 E. Tidak ada

19. Permainan ROOK menggunakan 45 kartu. Kartu tersebut terdiri dari 1 Rook, dan 4 jenis kartu berbeda warna yang masing-masing terdiri dari 11 kartu. Warna-warna kartu tersebut adalah merah, kuning, hijau dan hitam. Permainan ini dimainkan oleh 4 pemain. Masing-masing pemain mengambil 10 buah kartu secara acak sehingga tinggal 5 buah kartu yang tidak digunakan sampai permainan berakhir. Jika kartu Rook dianggap dapat menjadi kartu berwarna apa saja, ada berapa carakah seorang pemain mendapatkan ke-10 kartunya berwarna sama ?

A. 44 B. 66 C. 264 D. 528 E. Tidak ada

20. Disediakan 6 bilangan positif dan 8 bilangan negatif. Empat buah bilangan diambil secara acak. Berapakah peluang perkalian keempat bilangan tersebut adalah bilangan positif ?

    A. $\frac{202}{1001}$ B. $\frac{303}{1001}$ C. $\frac{404}{1001}$ D. $\frac{505}{1001}$ E. Tidak ada

21. Keadaan murid kemungkinannya adalah sehat atau sakit, Misalkan murid sekarang sehat maka peluang dia tetap sehat besok adalah 95%. Jika murid hari ini sakit maka peluang dia tetap sakit besok adalah 55%. Diketahui bahwa 20% murid hari ini sakit, maka prosentase murid diperkirakan sakit besok adalah ·····

    A. 11% B. 15% C. 20% D. 35% E. Tidak ada

22. Bilangan bulat dari 1 sampai 10.000 dalam basis 10 ditulis masing-masing 1 bilangan pada 1 kartu. Satu buah kartu kemudian diambil secara acak. Berapakah peluang yang terambil adalah kartu bertuliskan bilangan yang sekurang-kurangnya terdiri dari 3 angka jika dituliskan dalam basis 6 ?

    A. $\frac{99}{100}$ B. $\frac{1993}{2000}$ C. $\frac{2491}{2500}$ D. $\frac{1957}{2000}$ E. Tidak ada

23. Enam huruf dari kata BOGGLES dipilih kemudian disusun. Ada berapa carakah menyusun huruf-huruf ini ?

    A. 5040 B. 4680 C. 3240 D. 2520 E. Tidak ada

24. L adalah satu set koordinat (x,y) yang memenuhi x,y $\in$ bilangan bulat dan $x^2 + y^2 = 625$. Empat buah titik kemudian dipilih secara acak dari L dan merupakan titik sudut dari sebuah segi empat. Tentukan peluang bahwa keempat titik tersebut akan membentuk sebuah jajaran genjang.

    A. $\frac{4}{495}$ B. $\frac{2}{495}$ C. $\frac{4}{4845}$ D. $\frac{2}{4845}$ E. Tidak ada

25. Tentukan banyaknya susunan huruf dari kata PRIVACY jika disyaratkan huruf vokal harus saling berdekatan.

    A. 5040 B. 1440 C. 1008 D. 720 E. Tidak ada

26. Kode kartu siswa pada sebuah sekolah menggunakan kode 9 digit yang masing-masing berada pada range 0 sampai dengan 9 dan digit-digit kartu tersebut tidak ada yang sama. Digit 0 diperbolehkan ditaruh dimuka. Jika 1 kartu siswa diambil secara acak, berapakah peluang yang terambil, ke-9 digitnya selalu naik dan berurutan ?

    A. $\frac{1}{10^9}$ B. $\frac{1}{10!}$ C. $\frac{2}{10!}$ D. $\frac{2}{{}_{10}C_9}$ E. Tidak ada

27. 500 anak pada sebuah sekolah memiliki masing-masing 1 loker yang diberi tanda nomor 1 sampai 500. Pada saat kegiatan di sekolah dimulai, kondisi loker dalam keadaan tertutup. Anak yang memiliki loker dengan nomor 1 membuka semua loker. Setelah itu terjadi, anak yang memiliki loker dengan nomor 2 kemudian menutup loker dengan nomor yang merupakan kelipatan 2. Pekerjaan dilanjutkan oleh anak dengan nomor loker 3. Ia membalikkan kondisi loker dengan nomor kelipatan 3. Artinya ia membuka loker dengan nomor kelipatan 3 apabila sebelumnya dalam kondisi tertutup dan ia menutup loker dengan nomor kelipatan 3 yang kondisi sebelumnya terbuka. Pekerjaan membalikkan kondisi loker juga dilakukan oleh anak dengan nomor loker 4 sampai dengan 500 berturut-turut. Setelah anak dengan nomor loker 500 melakukan tugasnya, berapa banyak loker dalam keadaan terbuka ?

    A. 22 B. 94 C. 95 D. 96 E. Tidak ada

28. Sebuah sekolah swasta terdiri dari SLTP dan SLTA dengan jumlah total siswa sebanyak 1200 siswa dengan 640 di antaranya adalah siswa wanita. Jumlah siswa SLTP sebanyak 360 siswa dengan 200 di antaranya adalah siswa wanita. Berapakah peluang terpilihnya seorang siswa di sekolah tersebut adalah siswa SLTP atau berjenis kelamin wanita ?

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{8}{15}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$ E. Tidak ada

29. Sebuah kotak berisi 4 bola merah dan 2 bola biru. Dua bola sekaligus. Berapakah peluang yang terambil adalah bola yang berbeda warna ?

A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{6}{15}$ C. $\frac{8}{15}$ D. 1 E. Tidak ada

30. Pada sebuah perlombaan, 2 orang anak yaitu A dan B akan diadu kemampuannya. Masing-masing anak akan diberikan pertanyaan secara bergantian. Maksimal jumlah pertanyaan sebanyak 5. Pemain akan dinyatakan menang manakala jumlah menangnya lebih banyak dibandingkan lawannya. Pertandingan akan dihentikan jika terjadi seorang pemain tidak akan mungkin mengejar ketertinggalannya dari lawannya. Pemain A mempunyai kemampuan menjawab benar pertanyaan yang diajukan sebesar 75% sedangkan B hanya mempunyai kemampuan menjawab benar pertanyaan yang diajukan sebesar 60%. Tentukan peluang bahwa pertandingan tersebut akan dihentikan ketika masing-masing pemain tepat baru menyelesaikan 4 pertanyaan.

A. $\frac{3753}{160000}$ B. $\frac{2943}{40000}$ C. $\frac{3753}{40000}$ D. $\frac{3753}{32000}$ E. Tidak ada

PIGEON HOLE PRINCIPLE

Pigen Hole Principle (Prinsip Lubang Merpati) mengatakan bahwa jika **lebih dari n** benda dimasukkan ke dalam n kotak, maka sedikitnya ada satu kotak yang berisi lebih dari satu benda. Secara umum bahwa jika ada lebih dari pn benda dimasukkan ke dalam n kotak maka sedikitnya ada satu kotak berisi lebih dari p benda.

Bentuk Lain : Jika n **bilangan bulat** m_1, m_2, m_3, ···, m_n memiliki rata-rata $\frac{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}{n} > r - 1$, maka sedikitnya satu di antara bilangan-bilangan bulat tersebut lebih besar atau sama dengan r.

Contoh :
Jika ada 101 surat yang akan dimasukkan ke dalam 50 kotak pos, buktikan bahwa ada sedikitnya satu kotak pos berisi sekurang-kurangnya 3 surat.

Jawab :
Jika seluruh kotak pos masksimal hanya berisi 2 surat, maka jumlah maksimal surat yang dapat masuk kotak pos adalah 100. Tetapi jumlah surat yang ada yaitu 101. Maka dapat dipastikan ada sedikitnya satu kotak pos berisi sekurang-kurangnya 3 surat.

LATIHAN SOAL :

1. Pada sebuah pesta setiap orang yang hadir diharuskan membawa permen. Jika pada pesta tersebut jumlah orang yang hadir ada 10 sedangkan jumlah permen yang ada sebanyak 50 buah, buktikan bahwa ada sekurang-kurangnya 2 orang yang membawa permen dalam jumlah yang sama.

2. Jika terdapat $n^2 + 1$ titik yang terletak di dalam sebuah persegi dengan panjang sisi n, buktikan bahwa ada sekurang-kurangnya 2 titik yang memiliki jarak tidak lebih dari $\sqrt{2}$ satuan.

3. Jika terdapat $n^2 + 1$ titik yang terletak di dalam sebuah segitiga sama sisi dengan panjang sisi n, buktikan bahwa ada sedikitnya 2 titik yang jaraknya satu sama lain paling jauh $\frac{1}{n}$.

4. Jika diketahui m adalah bilangan bulat a_1, a_2, a_3, ···, a_m, tunjukkan bahwa ada bilangan bulat k, s dengan $0 \le k < s \le m$ sedemikian sehingga $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_s$ habis dibagi m.

5. Tiga buah titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$. Buktikan bahwa sedikitnya dua di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.

6. Di antara bilangan-bilangan 1, 2, ···, 200, jika 101 bilangan diambil, maka tunjukkan bahwa ada dua bilangan di antara yang terambil sedemikian sehingga yang satu habis dibagi yang lain.

7. Buktikan bahwa jika 100 bilangan diambil dari himpunan 1, 2, 3, ···, 200 sedemikian sehingga sedikitnya satu diantaranya lebih kecil dari 15, maka ada dua di antara yang terpilih sehingga yang satu habis dibagi yang lain.

8. Buktikan bahwa di antara 7 bilangan bulat, pasti ada sekurang-kurangnya sepasang bilangan yang selisihnya habis dibagi 6.

9. Buktikan bahwa di antara 5 bilangan bulat pasti ada 3 di antaranya memiliki jumlah habis dibagi 3.

10. Misalkan bilangan-bilangan 1 sampai 20 ditempatkan dalam urutan bagaimana pun pada sebuah lingkaran. Tunjukkan bahwa :
    a. ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya sedikitnya 32
    b. ada empat bilangan berdekatan yang jumlahnya sedikitnya 42

11. *Titik letis* pada bidang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa pasangan bilangan bulat.
    Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik letis berbeda pada bidang.
    Buktikan bahwa terdapat sepasang titik (P_i, P_j), $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.

12. *Titik letis* pada ruang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa tripel bilangan bulat (Contoh : (3,4,5); (3,–4,6)).
    Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 adalah delapan titik letis berbeda pada ruang.
    Buktikan bahwa terdapat sepasang titik (P_i, P_j), $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.

13. Buktikan bahwa jika dalam sebuah grup 6 orang, setiap 2 orang hanya dapat selalu bersahabat atau selalu bermusuhan, maka ada sedikitnya 3 orang yang saling bersahabat atau saling bermusuhan satu sama lain.

14. Di dalam suatu pesta terdapat n orang dan mereka saling bersalaman. Jika di antara 2 orang tidak ada yang bersalaman lebih dari 1 kali, buktikan bahwa ada sedikitnya 2 orang bersalamaan dalam jumlah yang sama.

15. Tunjukkan bahwa di antara tujuh bilangan bulat positif berbeda yang tidak lebih dari 126, kita selalu dapat menemukan dua di antaranya, katakanlah x dan y dengan y > x sedemikian sehingga $1 < \frac{y}{x} \le 2$.

16. Diberikan 7 bilangan real. Buktikan bahwa kita dapat memilih dua di antaranya katakana a dan b sehingga $0 \le \frac{a-b}{1+ab} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. (Petunjuk : Rumus yang dapat digunakan adalah $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$)

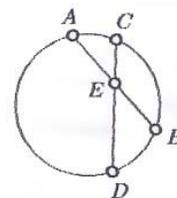
17. Terdapat 115 bola yang dijajarkan pada satu garis lurus dan terdapat 60 bola merah di antaranya. Masing-amsing bola diberi nomor berbeda sesuai dengan urutannya yaitu nomor 1 sampai 115. Tunjukkan bahwa sedikitnya ada 2 bola merah yang terpisah 4 bola (Misalnya bola merah dengan nomor 5 dan 9 serta nomor 36 dan 40 memenuhi syarat ini).

18. Seorang pemain catur memiliki waktu 11 minggu untuk menyiapkan diri mengikuti sebuah turnamen. Ia memutuskan untuk berlatih sedikitnya satu permainan setiap hari, namun tidak lebih dari 12 permainan selama seminggu. Perlihatkan bahwa ada beberpa hari berturut-turut yang selama itu pecatur tersebut berlatih tepat 21 permainan.

KUMPULAN SOAL
MATERI DASAR
OLIMPIADE MATEMATIKA
BIDANG GEOMETRI

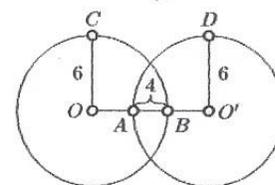
Sumber : Alabama State-Wide Mathematics Contest 2002 Geometry Examination

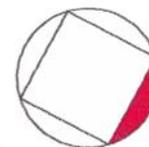
1. Diketahui AE = 6, EB = 5 dan CE = 4. Tentukan DE.

   A. 7 B. $7\frac{1}{2}$ C. 8 D. $4\frac{4}{5}$ E. 9

2. Sebuah persegi dipotong pada salah satu bagian sudutnya dengan ukuran seperti pada gambar. Maka luas daerah persegi yang tersisa adalah .....

   A. 64 B. 40 C. 58 D. 44 E. 72

3. Diketahui dua buah lingkaran yang sama dengan pusat di O dan O' saling berpotongan seperti tampak pada gambar. Panjang $\overline{OO'}$ adalah .....

   A. 8 B. 12 C. 6 D. 10 E. 14

4. Sebuah bujur sangkar digambar di dalam sebuah lingkaran yang berjari-jari 6 dengan keempat titik sudut bujur sangkar tersebut terletak pada lingkaran. Luas daerah yang diarsir adalah .....

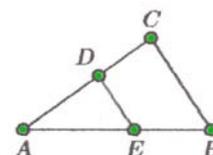
   A. $36\pi - 18\sqrt{2}$ B. $9\pi - 18$ C. $12\pi - 4$ D. $144 - 36\pi$ E. $36 - 9\pi$

5. Berapa banyak diagonal dapat dibuat pada poligon 9 sisi ?

   A. 27 B. 36 C. 45 D. 63 E. 72

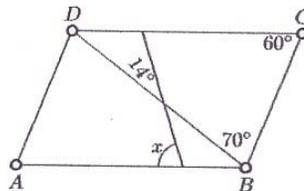
6. Sudut dalam sebuah poligon beraturan aalah 140^o. Berapa banyakkah sisi yang dimiliki poligon tersebut ?

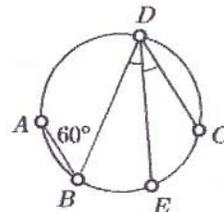
   A. 9 B. 6 C. 12 D. 18 E. 40

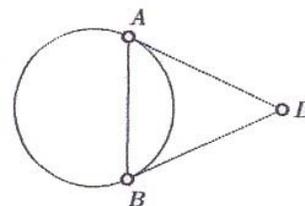
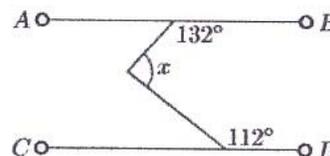
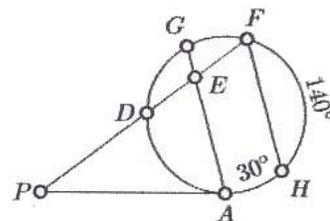
7. Jika dari gambar di samping diketahui $\overline{DE}$ sejajar $\overline{BC}$ dan luas ΔABC sembilan kali luas ΔADE, maka perbandingan panjang $\overline{CB}$ dengan $\overline{DE}$ adalah .....

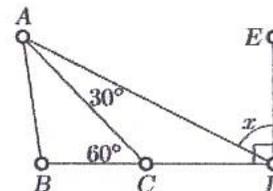
   A. 9 B. 6 C. 3 D. 1 E. 5

8. Seseorang akan membangun sebuah pagar dengan keliling pagar 120 feet dilihat dari atas tanah. Yang manakah di antara daerah berikut yang akan membuat daerah yang dibatasi oleh pagar tersebut akan memiliki luas yang maksimum ?

   A. segitiga B. persegi panjang C. bujur sangkar D. segi-6 beraturan E. segi-5 beraturan

9. Pada gambar di samping, segi empat ABCD merupakan jajaran genjang. Besar $\angle$x adalah ····
A. 64^o B. 70^o C. 60^o D. 76^o

10. Sebuah kerucut alasnya berbentuk lingkaran dengan diameter 12 feet dan tinggi 4 feet. Berapa feet kubikkah pasir dapat diisikan ke kerucut tersebut ?
A. 48π B. 144π C. 64π D. 72π E. 12π

11. Dari gambar disamping diketahui ruas garis AB sejajar ruas garis garis CD, $\angle$B = 60^o dan $\overline{DE}$ merupakan garis bagi $\angle$D. Berapa derajatkah busur CE ?
A. 15^o B. 30^o C. 60^o D. 120^o E. 90^o

12. Berapa feet^2 asbes yang diperlukan untuk menutupi permukaan sebuah pipa yang panjangnya 100 feet dan berdiameter 3,5 inch ?
A. 3800 B. 2200 C. 1100 D. 77 E. 480

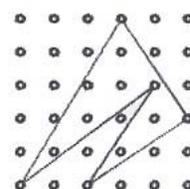
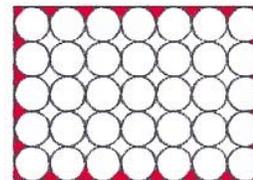
13. Jika garis AD dan BD adalah garis singgung lingkaran O dan panjang AD dua kali panjang AB, maka ΔADB adalah segitiga ····
A. siku-siku B. sama kaki C. sama sisi
D. tumpul E. tidak dapat ditentukan

14. Jika garis AB sejajar CD, maka besar $\angle$x adalah ·····
A. 48^o B. 116^o C. 68^o D. 64^o E. 140^o

15. Diketahui ruas garis PA menyinggung lingkaran di titik A. Ruas garis PF memotong lingkaran dengan titik F terletak pada lingkaran. Busur DG $\cong$ busur GF. Garis GA sejajar garis FH, besar sudut busur FH = 140^o dan besar sudut busur HA = 30^o, maka besar $\angle$P adalah ·····
A. 15^o B. 40^o C. 30^o D. 20^o E. 60^o

16. Jika $\frac{2}{9}$ dari panjang sisi sebuah belah ketupat adalah 12, berapakah keliling belah ketupat tersebut ?
A. 54 B. 108 C. 144 D. 180 E. 216

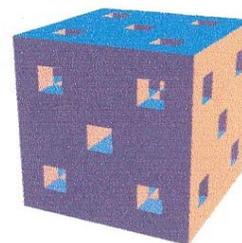
17. Berdasarkan gambar di samping $\overline{DE} \perp \overline{DB}$, maka besar $\angle$x adalah ·····
A. 15^o B. 30^o C. 45^o D. 60^o E. 75^o

18. Volume sebuah kubus adalah 125. Tentukan panjang semua rusuk kubus tersebut.
    A. 60 B. 5 C. 40 D. 150 E. 200

19. Jika beberapa garis dibuat dalam satu bidang datar, tentukan berapa jumlah minimum garis lurus yang diperlukan agar banyaknya perpotongan titik garis-garis tersebut ada 6 buah.
    A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7

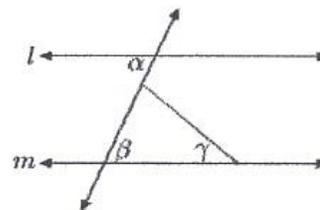
20. Sebuah bujur sangkar (persegi) dan segitiga sama sisi mempunyai keliling yang sama. Jika luas segitiga tersebut $16\sqrt{3}$, maka luas bujur sangkar tersebut adalah ····
    A. 9 B. 16 C. 25 D. 36 E. 576

21. Pada sebuah lingkaran, berapakah perbandingan luas segi-6 beraturan yang dibuat di dalam lingkaran tersebut dengan luas segi-6 beraturan yang sisi-sisinya menyinggung lingkaran tersebut ?
    A. 65% B. 70% C. 75% D. 80% E. Tidak dapat ditentukan

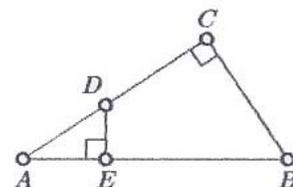
22. Jarak vertikal dan horisontal dari sebuah titik yang berdekatan adalah 1. Hitunglah luas derah dari bangun pada gambar.
    A. $\frac{15}{2}$ B. 8 C. $\frac{17}{2}$ D. $\frac{19}{2}$ E. 10

23. Semua lingkaran pada gambar di samping yang berdekatan saling bersinggungan satu sama lain dan/atau juga menyinggung persegi panjang. Masing-masing lingkaran memiliki jari-jari 1. Tentukan nilai pendekatan luas daerah yang diarsir.
    A. 7 B. 8 C. 9 D. 10 E. 11

24. Jika panjang dan lebar sebuah persegi panjang masing-masing ditambah 1, maka luas persegi panjang tersebut menjadi 7 kali luas persegi panjang semula. Jika panjang persegi panjang semula ditambah 2 sedangkan lebarnya ditambah 1, maka luas persegi panjang yang terbentuk menjadi 10 kali luas persegi panjang semula. Berapakah keliling persegi panjang semula ?
    A. $\frac{45}{2}$ B. $\frac{9}{2}$ C. 22 D. $\frac{17}{3}$ E. $\frac{10}{3}$

25. Sebuah kubus berukuran 7 x 7 x7. Dari masing-masing sisi kubus tersebut dibuat 5 buah lubang lurus yang masing-masing berukuran 1 satuan persegi tembus sampai ke sisi di hadapannya (lihat gambar). Berapakah volume bangun tersebut ?
    A. 238 B. 248 C. 250 D. 256 E. 313

26. Besarnya sudut dalam dari segi-6 beraturan dinyatakan dalam derajat adalah a. Pengukuran sudut luar dari segi-8 beraturan tersebut dinyatakan dalam derajat adalah b. Perbandingan a dan b adalah ·····
    A. 3 : 8 B. 4 : 3 C. 2 : 1 D. 8 : 3 E. 3 : 1

27. Jika garis l sejajar garis m, $\angle\alpha = 65^o$ dan $\angle\gamma = 45^o$, maka $\angle\beta - \angle\gamma = \cdots\cdots$

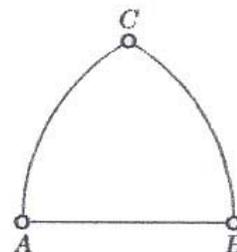
A. 0^o B. 20^o C. 45^o D. 65^o E. 70^o

28. Titik-titik (–3,–2) dan (11,–10) merupakan ujung-ujung diameter sebuah lingkaran. Koordinator pusat lingkaran tersebut adalah ····
A. (2,–3) B. (4,–6) C. (8,–12) D. (–7,–6) E. (–4,–6)

29. Jika panjang AD = 3, DE = 2 dan AB = 15, berapakah panjang CB ?

A. $\sqrt{13}$ B. $3\sqrt{13}$ C. 10 D. 26 E. $2\sqrt{10}$

30. Berapakah luas belah ketupat yang memiliki panjang diagonal 6 dan 9 ?
A. 27 B. 24 C. 13,5 D. 54 E. 48

31. Gambar di samping dibuat melalui cara dengan A sebagai pusat dan AB jari-jari dibuat busur CB dan dengan B sebagai pusat dan AB jari-jari dibuat busur CA. Jika AB = 4, berapakah luas daerah gambar tersebut ?

A. $\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{12\pi - 16\sqrt{3}}{3}$ C. 16π

D. $\pi - 2$ E. $\frac{32\pi - 8\sqrt{3}}{3}$

32. Diketahui garis w, x, y dan z adalah 4 buah garis lurus yang dibuat pada satu bidang. Jika $w \perp x$, $y \parallel w$ dan $z \parallel w$, maka semua pernyataan di bawah ini salah kecuali ····
A. $z \perp y$ B. $z \parallel x$ C. $w \perp z$ D. $x \parallel y$ E. $z \perp x$

33. Sebuah prisma memiliki alas berbentuk persegi panjang dengan panjang 5, lebar 2 dan tinggi 4. Total luas permukaan prisma tersebut adalah ····
A. 40 B. 56 C. 66 D. 68 E. 76

34. Jika panjang sisi-sisi kubus dijadikan dua kali panjang semula, berapa persenkah pertambahan volumenya ?
A. 100% B. 300% C. 600% D. 700% E. 800%

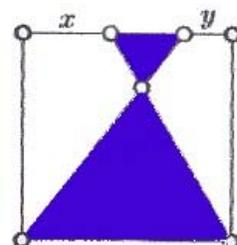
35. Segitiga ABC memiliki titik-titik sudut A(–1,2), B(3,8) dan C(5,–2). Tentukan luas segitiga ABC.
A. 12 B. 26 C. 42 D. 56 E. 66

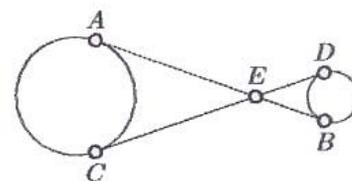
36. Sebuah silinder memiliki jari-jari alas 6 inches dan tingginya 10 inches. $\frac{2}{3}$ bagiannya diisi pasir. Berapa inches kubikkah pasir yang ada didalam silinder ?
A. 40π B. 80π C. 240π D. 120π E. 360π

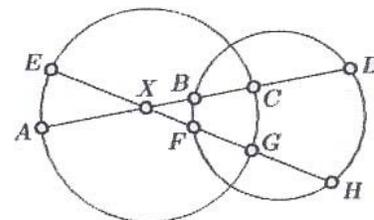
37. Yang manakah diantara bilangan-bilangan berikut yang nilainya mendekati jarak yang ditempuh sebuah roda mobil berdiameter 2 ft yang telah berputar sebanyak 350 kali ?
    A. 1500 ft B. 1800 ft C. 2200 ft D. 3000 ft E. 4200 ft

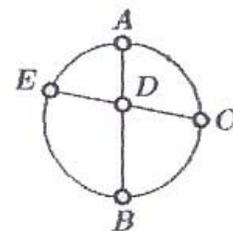
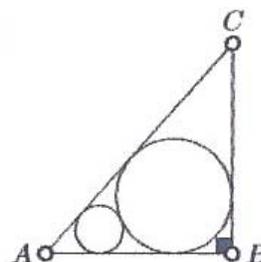
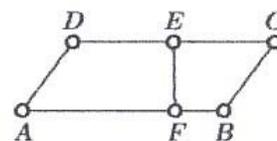
38. Sebuah pohon yang tingginya 10 ft memiliki bayangan yang panjangnya 25 ft. Pada saat yang sama bayangan sebuah benda panjangnya 5 ft. Berapakah tinggi benda tersebut ?
    A. 2 B. 12,5 C. 50 D. 75 E. 100

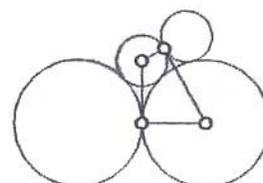
39. Luas persegi pada gambar di samping adalah 1 dengan $\frac{x}{y}$ = 7. Jika luas arsir segitiga yang lebih besar 9 kali luas arsir segitiga yang kecil, maka luas daerah yang diarsir adalah .....

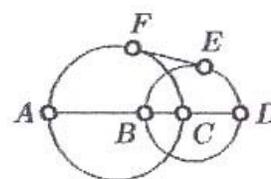
    A. $\frac{7}{12}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $\frac{7}{18}$ D. $\frac{5}{14}$ E. $\frac{5}{12}$

40. Garis AB menyinggung lingkaran besar dan lingkaran kecil berturut-turut di A dan B. Garis CD menyinggung lingkaran besar dan lingkaran kecil berturut-turut di C dan D. Jika AC = 9, AE = 6 dan ED = 1, maka tentukan selisih jari-jari kedua lingkaran.

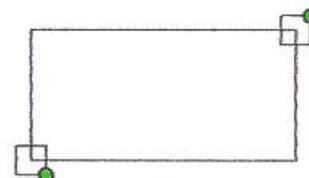
    A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{5}$ E. $3\sqrt{5}$

41. Diberikan bahwa AX = 5, BC = 2, CD = 4, EX = 5, XF = 1 dan GH = 3. Tentukan FG – XB.

    A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$ E. 1

42. Diketahui bahwa AD = 2, DB = 4, Busur AC ≅ busur CB dan ruas garis AB sebagai diameter lingkaran. Tentukan panjang EA.

    A. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ E. $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

43. Dua buah lingkaran saling bersinggungan. Kedua lingkaran ini juga menyinggung sisi-sisi segitiga siku-siku ABC. Jika lingkaran yang besar berjar-jari 12 sedangkan lingkaran yang kecil memiliki jari-jari 3, maka hitunglah luas segitiga tersebut.
    A. 420 B. 620 C. 1240 D. 1344 E. 2688

44. ABCD adalah sebuah jajaran genjang dengan panjang DE = panjang EC. F terletak pada sisi AB dengan F ≠ B. Jika garis EF membagi jajaran genjang dengan perbandingan luas p : 1 dimaan p > 1, maka $\frac{AF}{FB}$ = ...

    A. $\frac{3p-1}{3-p}$ B. p^2 C. $\frac{3p-1}{p+1}$ D. $\frac{p+1}{2p}$ E. $\frac{p+1}{p^2+1}$

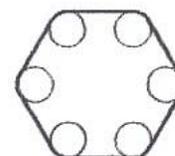
45. Semua lingkaran pada gambar saling bersinggungan. Jari-jari lingkaran besar adalah 4 sedangkan lingkaran kecil berjari-jari 1. Dua dari empat titik sudut segi empat pada gambar adalah pusat lingkaran sedangkan dua yang lainnya titik singgung lingkaran. Tentukan luas segi empat yang terbentuk.

    A. $6+\sqrt{6}$ B. $6\sqrt{6}$ C. $4+2\sqrt{2}$ D. $6+\sqrt{10}$ E. $5+\sqrt{2}$

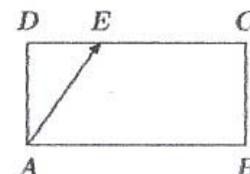
46. Garis EF menyinggung lingkaran besar di F dan menyinggung lingkaran kecil di E. AC dan BD masing-masing adalah diameter lingkaran besar dan lingkaran kecil. Radius lingkaran besar = 5 sedangkan lingkaran kecil berjari-jari 3. Jika EF = 4, maka BC = ...

    A. $3+2\sqrt{5}$ B. $5-2\sqrt{2}$ C. $5-2\sqrt{5}$
    D. $8+2\sqrt{5}$ E. $8-2\sqrt{5}$

47. Persegi panjang pada gambar memiliki ukuran 3 x 5. Pada sudut kiri bawah dan sudut kanan atas dibuat bujur sangkar dengan sisi-sisinya sejajar terhadap persegi panjang dan berpusat di titik sudut persegi panjang tersebut. Bujur sangkar tersebut memiliki sisi yang panjangnya 1. Tentukan jarak 2 buah titik yang diberi tanda pada gambar.

    A. $3\sqrt{5}$ B. $\sqrt{41}$ C. $\sqrt{34}$ D. $2\sqrt{10}$ E. $2\sqrt{13}$

48. Daerah yang tidak diarsir dan dibatasi oleh bagian yang diarsir adalah merupakan segi-8 beraturan. Ke-8 titik sudut segi-8 ini terletak pada sebuah lingkaran yang berjari-jari 1. Tentukan luas daerah yang diarsir.

    A. $3-\sqrt{2}$ B. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ D. $4-2\sqrt{2}$ E. $\frac{4}{3}$

49. Sebuah tali dililitkan melalui 6 buh roda. Jika pusat roda yang terdekat saling dihubungkan, maka akan terbentuk sebuah segi-6 beraturan yang diameter lingkaran luarnya sama dengan 6. Masing-masing roda berdiameter 1. Berapakah nilai pendekatan dari panjang tali yang dibutuhkan untuk mengikat ke-6 roda tersebut.

    A. 42 B. 20 C. 22 D. 35 E. 21

50. Sebuah meja biliar tanpa lubang panjang sisi-sisinya 5 ft dan 10 ft. Sebuah bola disodok dari titik A(sudut kiri bawah) ke arah titik E (lihat gambar). Bola akan memantul dari satu sisi ke sisi yang lain. Setelah beberapa pantulan, bola akan menumbuk sisi AD untuk pertama kalinya. Anggap titik ini dinamakan F. Jika DE = 3, berapakah panjang AF dinyatakan dalam feet ?

    A. 2 B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{10}{3}$ D. 3 E. $\frac{5}{2}$

LATIHAN

PILIHAN GANDA

1. Jika A = $(-1)^{-1}$, B = $(-1)^{1}$ dan C = 1^{-1}. maka A + B + C = ...
   A. –3 C. –1 E. 3
   B. –2 D. 1

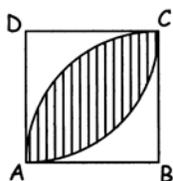
2. $\frac{50^{50}}{25^{25}} = \cdots\cdots$
   A. 25^{25} C. 100^{25} E. $2 \cdot 25^{25}$
   B. 10^{25} D. 2^{25}

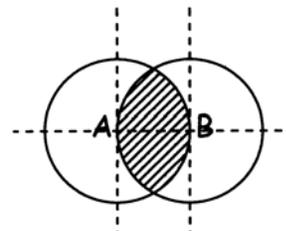
3. $\sqrt[7]{7^{7^7}} = \cdots\cdots$
   A. 7^7 C. 7^{6^7} E. $\left(\sqrt{7}\right)^7$
   B. $7^{(7^7-1)}$ D. 7^{7^6}

4. Jika $\frac{{}^b\log a}{{}^c\log a} = \frac{1}{2}$ dan $\frac{b}{c} = c^k$, maka k = ···
   A. 0 C. 2 E. 4
   B. 1 D. 3

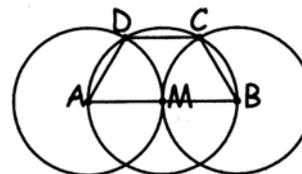
5. Hasil kali polinomial (1 + x + x^2 + ··· + x^{100}) dengan (1 + x + x^2 + ··· + x^{25}) adalah juga polinomial dengan variabel x. Koefisien dari x^{50} adalah ····
   A. 1 C. 26 E. 51
   B. 25 D. 50

6. Pada suatu segitiga sama sisi, perbandingan luas lingkaran dalam dengan luas lingkaran luar adalah ····
   A. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{4}{9}$ E. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
   B. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

7.

   Dua buah seperempat lingkaran yang masing-masing berjari-jari 7 satuan, saling berpotongan di A dan C membentuk bujur sangkar dengan sisi 7 satuan. Luas daerah yang diarsir adalah ···· (ambil $\pi = \frac{22}{7}$)
   A. 12 C. 26 E.28
   B. 13 D. 27

8.

   Titik A dan B adalah pusat 2 lingkaran yang masing-masing berjari-jari 10 satuan. Luas daerah yang diarsir adalah ····
   A. $\frac{100\pi}{3} - 25\sqrt{3}$ D. $\frac{100\pi}{3} - 50\sqrt{3}$
   B. $\frac{200\pi}{3} - 50\sqrt{3}$ E. $\frac{400\pi}{3} - 25\sqrt{3}$
   C. $\frac{400\pi}{3} - 100\sqrt{3}$

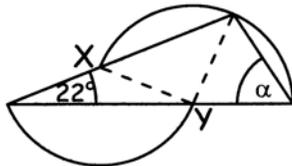
9. $\sqrt{0{,}4444\cdots} = \cdots\cdots$
   A.0,20202··· C. 0,22222··· E. 0,40404···
   B. 0,60606··· D. 0,66666···

10.

   Dua lingkaran dengan titik pusat A dan B serta masing-masing berjari-jari 2 saling menyinggung di titik M. lalu dibuat lingkaran dengan titik pusat M dengan jari-jari 2 memotong kedua lingkaran di titik C dan D (lihat gambar). Luas segi empat ABCD adalah ····
   A. $3\sqrt{2}$ C. $\pi\sqrt{3}$ E. $6\sqrt{3}$
   B. $3\sqrt{3}$ D. 6

11. Bilangan real 0,2343434··· adalah bilangan rasional sehingga dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b masing-masing adalah bilangan bulat, b ≠ 0. Jika a dan b relatif prima, maka a + b = ·····
A. 611 C. 2232 E. 712
B. 2444 D. 1659

12. Dalam suatu kompetisi Matematika berlaku peraturan bahwa jika satu soal dijawab benar bernilai 4, jika salah bernilai –1 sedangkan jika kosong bernilai 0. Jika pada kompetisi tersebut jumlah soal sebanyak 30, maka jumlah peserta minimal sehingga pasti ada dua peserta dengan nilai yang sama adalah ······· peserta.
A. 121 C. 146 E. 152
B. 145 D. 151

13. Jika $x+y+3\sqrt{x+y}=18$ dan $x-y-2\sqrt{x-y}=15$, maka x·y = ·····
A. –136 C. –36 E. 225
B. –126 D. 15

14. Perhatikan gambar !

Gambar di atas menunjukkan lingkaran dengan pusat di X dan Y. maka α = ····
A. 44° C. 57° E. 68°
B. 46° D. 60°

ESSAI

15. Jika $(3x^2 - x + 1)^3$ dijabarkan dalam suku-sukunya akan menjadi $a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tentukan nilai dari :
a) $a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$
b) $a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$
c) $a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$
d) $a_6 + a_4 + a_2 + a_0$

16. Suatu bilangan berakhir dengan angka 6. Jika angka 6 tersebut dipindahkan ke depan, maka bilangan tersebut akan menjadi 4 kali bilangan semula. Jika diinginkan bilangan tersebut minimum maka tentukan bilangan semula tersebut.

17. Diketahui ab + a + b = 90 dengan a, b adalah bilangan bulat positif. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (a,b) yang memenuhi.

18. Jika $2002 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$, dimana a_k adalah bilangan bulat, $0 \le a_k \le k$, k = 1, 2, ···, n dan $a_k \ne 0$, tentukan pasangan terurut (n, a_n).

19. Jika a dan b adalah akar-akar persamaan kuadrat $11x^2 - 4x - 2 = 0$. hitunglah nilai dari :
$(1 + a + a^2 + \cdots)(1 + b + b^2 + \cdots)$

20. Jika b = 2000, hitunglah nilai deret tak hingga berikut :
$$\left({}^b\log 2\right)^0\left({}^b\log 5^{4^0}\right)+\left({}^b\log 2\right)^1\left({}^b\log 5^{4^1}\right)+\left({}^b\log 2\right)^2\left({}^b\log 5^{4^2}\right)+\ldots$$

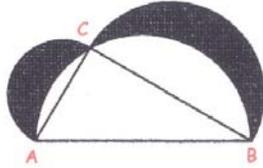
21. Segitiga ABC adalah segitiga sama kaki dengan AB = AC. Jika ∠A = θ dan ketiga sisi ΔABC adalah $\sin\theta$, $\sqrt{\sin\theta}$ dan $\sqrt{\sin\theta}$. Hitunglah luas ΔABC.

22. Untuk x, y, z dan w ≥ 0, hitunglah nilai terkecil x yang memenuhi sistem persamaan berikut :
y = x – 2004
z = 2y – 2004
w = 3z – 2004

23. Jika diketahui $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, buktikan bahwa $k=\frac{a+c+e}{b+d+f}$. Setelah itu tentukanlah nilai $\frac{x}{y}$ jika untuk tiga bilangan positif berbeda x, y, z berlaku hubungan $\frac{x}{y}=\frac{x+y}{z}=\frac{y}{x-z}$.

24. n adalah bilangan bulat. Jika angka puluhan n^2 adalah 7, maka berapakah angka satuan dari n^2 ?

25. Untuk n bilangan bulat, buktikan bahwa $n^3 + 11n$ habis dibagi 6.

26. Garis AB, AC dan BC adalah diameter dari setengan lingkaran. Buktikan bahwa luas daerah yang diarsir sama dengan luas segitiga ABC.

27. Jika dilihat dari kiri ke kanan 7 digit terakhir dari n! adalah 8000000. Tentukan nilai n. (Ingat n! adalah n faktorial, n! = 1·2·3·4····(n–1)·n)

28. Sebuah bilangan terdiri dari 3 digit. Bilangan tersebut sama dengan 30 kali jumlah ketiga digitnya. Tentukan bilangan tersebut.

29. Jika n adalah bilangan bulat lebih dari 1, buktikan bahwa $n^6 - n^2$ habis dibagi 60.

30. Berapakah bilangan bulat positif terbesar yang membagi semua bilangan 1^5-1, 2^5-2, ···, n^5-n, ··?

31. Sebuah fungsi f memetakan bilangan bulat ke bilangan bulat yang didefinisikan oleh :

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{jika } n \ge 1000 \\ f(f(n+6)) & \text{jika } n < 1000 \end{cases}$$

Nilai f(1992) – f(1) = ······

32. Tentukan jumlah dari :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

33. $\sqrt{17-12\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$ dengan a dan b adalah bilangan bulat. Tentukan nilai a adan b.

34. Berapa banyak dari 6 bilangan yang terdiri dari 10 angka berikut ini yang habis dibagi 6.

1515151515	1994001994	2222222224
2333333334	3888888888	9999999999

35. Tentukan angka satuan dari $17^{2003} - 2002$.

36. Hasil kali bilangan dalam satu baris maupun dalam satu kolom adalah sama dengan angka yang terdapat pada sebelah kanan maupun bawah kotak. Angka-angka yang diperbolehkan diisi pada kotak yang kosong adalah : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dan 9.

			72
			120
			42
70	32	162	

37. Bilangan bulat positif p ≥ 2 disebut prima jika ia hanya mempunyai factor 1 dan p. tentukan nilai penjumlahan semua bilangan prima antara 1 dan 100 yang sekaligus bersifat : satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 5 dan satu kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 6.

38. Jika $4^x + 4^{-x} = 7$, maka tentukan nilai dari $8^x + 8^{-x}$.

39. Hitunglah nilai dari :

$$\frac{1}{1x3} + \frac{1}{2x4} + \frac{1}{3x5} + \cdots + \frac{1}{22x24} + \frac{1}{23x25}$$

40. Untuk a dan b bilangan bulat positif, tentukan nilai b yang memenuhi : $a^2 - b^2 = 83$

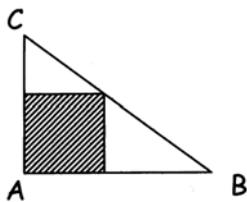
41. Untuk a, b, c d dan e positif tentukan penyelesaian dari :

ab =1	bc = 2	cd = 3
de = 4	ea = 6	

42. Hitunglah :
$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

43. Tentukan bilangan terbesar dan terkecil dari 4 bilangan berikut : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $3-\sqrt{6}$ dan $1+\frac{1}{\pi}$.

44. Ada 5 ekor binatang : A, B, C, D dan E yang berjenis Srigala atau Anjing. Anjing selalu berkata benar sedangkan Srigala selalu berkata bohong. A mengatakan bahwa B adalah seekor Anjing. C mengatakan bahwa D adalah Srigala. E mengatakan bahwa A adalah Anjing. B mengatakan bahwa C adalah Srigala. D mengatakan bahwa B dan E berbeda jenis. Banyaknya Srigala adalah ····· ekor.

45. Pada sebuah segitiga ABC dengan sisi-sisi 3 cm, 4 cm dan 5 cm, dibuat bujur sangkar (lihat gambar). Tentukan luas bujur sangkar tersebut.

46. Jumlah uang yang ada di tangan 3 orang penjudi A, B dan C berbanding 7 : 6 : 5 saat awal permainan. Jika perbandingan uang mereka pada akhir pertandingan adalah 6 : 5 : 4, tentukan siapa yang menang dan kalah. Jika salah satu penjudi memenangkan Rp. 120.000,-, tentukan jumlah uang masing-masing penjudi saat awal pertandingan.

47. Buktikan jika m > 1 dan n > 1 maka $m^4 + 4n^4$ tidak mungkin bilangan prima.

48. Tentukan banyaknya digit pada $4^8 \cdot 5^{17}$.

49. A, B dan C adalah sudut-sudut suatu segitiga. Jika A, B dan C merupakan deret aritmatika, maka nilai dari $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \cdots\cdots$

50. Jika $\dfrac{3a+4b}{2a-2b} = 5$, maka nilai $\dfrac{a^2+2b^2}{ab} = \cdots\cdots$

51. Pada sebuah segitiga dengan sisi a, b dan c, buktikan bahwa : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} < 2$

52. Tentukan penyelesaian real dari persamaan : $(x^2-x+1)(x^2-x+2) = 12$

53. Tunjukkan bahwa jika kita menambahkan 1 pada perkalian 4 bilangan bulat positif berurutan akan menghasilkan bilangan kuadarat sempurna. (Contoh : $1\cdot2\cdot3\cdot4 + 1 = 25 = 5^2$)

54. Diberikan himpunan H = {1,2,3,4,5,···,18,19,20} yang akan dibentuk suatu sub himpunan dari himpunan H yang terdiri dari 3 elemen. Tentukan banyaknya kemungkinan yang bisa dibuat jika disyaratkan perkalian ketiga elemen tersebut tidak habis dibagi 4.

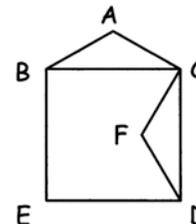
55. Tentukan nilai X yang memenuhi :

$$X = \left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right) + \left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

56. Tentukan himpunan penyelesaian dari : $|x-7| + |x+3| = 10$

57. Tunjukkan bahwa jika $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ dan p_1, p_2 dan p_3 semuanya tidak sama dengan nol, maka :

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$$

58. BCDE adalah bujur sangkar. Segitiga ABC kongruen dengan segitiga FCD dengan ∠A = 120° dan AB = AC. Jika AF = 2000, hitung luas bujur sangkar BCDE.

59.

	1		
	5		
2	16	9	
3			

Jika jumlah pada setiap baris kolom dan diagonal sama, tentukan nilai pada masing-masing kotak yang kosong

dengan syarat nilai-nilai yang diperbolehkan adalah 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15

60. Tentukan sisanya jika 2^{2003} dibagi 7.

61. Jika a, b, c > 0 dan a + b + c = 1 buktikanlah bahwa $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8abc$.

62. Misalkan A adalah himpunan bagian dari himpunan H = {1, 11, 21, 31, ⋯, 541, 551}. Dari elemen-elemen A tersebut tidak ada 2 buah di antaranya yang berjumlah 552. Berapakah jumlah maksimal elemen dari A ?

63. Berapakah banyaknya cara dari 5 orang calon dipilih tim Cerdas Cermat yang terdiri dari 1 pembicara dan 2 orang sebagai anggota ?

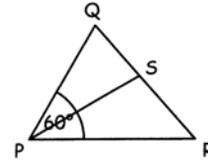
64. Tentukan pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi persamaan $x^4 + y^2 = 1994$.

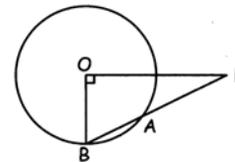
65. Tanggal 14 Juli 1998 adalah tanggal spesial karena jika tanggal tersebut ditulis dalam bentuk 14/7/98 maka dapat terlihat bahwa perkalian 14 x 7 = 98. Ada berapa tanggal spesial antara 1 Januari 1900 sampai dengan tanggal 31 Desember 1999 ?

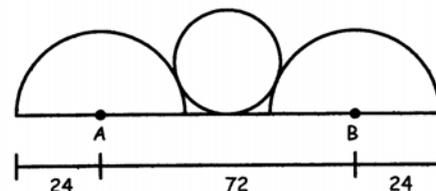
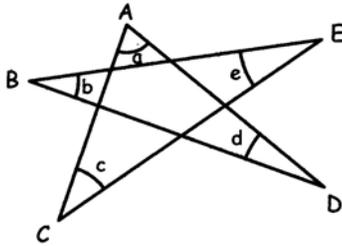
66. Tentukan nilai a, b dan c yang memenuhi sistem persamaan berikut :
   a + b + c = 9
   ab + ac + bc = 26
   abc = 24

67. Tentukan jumlah dari
$$\frac{2}{3} - 4 + \frac{4}{9} - \frac{4}{7} + \frac{8}{27} - \frac{4}{49} + \cdots\cdots$$

68. Jika $x^{1999} = 1$ mempunyai akar a, a ≠ 1. Tentukan nilai dari : $1 + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \cdots + a^{1998}$.

69. Diketahui ΔPQR dengan PQ = 4 cm, PR = 5 cm, dan ∠QPR = 60°. Jika PS adalah garis bagi ∠QPR, maka hitunglah panjang PS.

70. Hitunglah jumlah dari :
$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+2005}$$

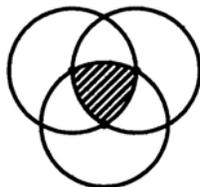
71. Lingkaran dengan pusat O dengan titik A dan B terletak pada lingkaran serta P di luar lingkaran. Jika panjang PO = diameter lingkaran tersebut dan tegak lurus OB, hitung $\frac{PA}{AB}$.

72. Pada sebuah meja diletakkan 100 buah kancing. A dan B bergantian memindahkan kancing yang ada di atas meja tersebut ke tempat lain sampai kancing yang ada di atas meja habis. Untuk sekali memindahkan mereka hanya boleh memindahkan maksimum 10 kancing. Orang yang memindahkan kancing yang ke-100 adalah sebagai pemenang. Jika A memindahkan kancing terlebih dahulu, tentukan :
   a. Strategi A agar ia menang
   b. Siapa yang berpeluang menang jika kancing di atas meja ada 99

73. Dua buah lingkaran yang tidak saling berpotongan masing-masing memiliki jari-jari 24 serta berpusat di A dan B. Jarak A ke B = 72. Dibuat garis yang menghubungkan kedua pusat lingkaran tersebut. Sebuah lingkaran dibuat menyinggung garis hubung ini dan kedua lingkaran sebelumnya. Berapakah jari-jari lingkaran ke-3 tersebut ?

74. Pada gambar di bawah ini a, b, c, d dan e adalah sudut-sudut pada titik A, B, C, D dan E. Hitunglah nilai a + b + c + d + e.

75. Hitunglah jumlah :
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2004^2}\right)\left(1-\frac{1}{2005^2}\right)$$

76. Dalam segitiga ABC diketahui $\angle A = 80^o$. Titik-titik D, E dan F berturut-turut terletak pada sisi-sisi BC, AC dan AD sedemikian sehingga CE = CD dan BD = BF. Tentukan besar $\angle EDF$.

77. Buktikan untuk setiap bilangan asli n, jika n tidak habis dibagi 4 maka $1996^n + 1997^n + 1998^n + 1999^n$ habis dibagi 5.

78. Diketahui $\frac{xy}{x+y} = a$; $\frac{xz}{x+z} = b$ dan $\frac{yz}{y+z} = c$. Tentukan x dituliskan dalam a, b dan c.

79. Diberikan lingkaran dengan jari-jari 1. Salah satu perpotongan dua lingkaran terletak pada pusat lingkaran yang lain (lihat gambar). Hitung luas daerah yang diarsir.

80. Ditentukan 3 pernyataan mengenai A, B dan C.
    - Jika A benar maka B dan C benar
    - Jika B benar maka sekurang-kurannya salah satu A atau C benar.
    - Jika C benar, maka A benar dan B salah

    Dari pernyataan tersebut, yang mana di antara A, B dan C yang benar.

81. Carilah suatu bilangan terdiri dari 5 angka dan merupakan kuadrat sempurna yang angka-angkanya berturut-turut adalah :
    k, k + 1, k + 2, 3k, k + 3

82. Aku adalah sebuah pecahan. Kebalikanku $\frac{9}{20}$ lebih besar dari diriku. Siapakah aku ?

83. Semua bilangan yang terdiri dari 2 angka dari 19 sampai dengan 96 ditulis secara berurutan sehingga membentuk sebuah bilangan asli N = 1920212223242526⋯93949596.
    a. Buktikan bahwa N habis dibagi 3.
    b. Tentukan nilai k terbesar sehingga 3^k membagi N.

84. Pada segiempat tali busur ABCD diketahui panjang AB = 1, BC = 2, CD = 3 dan DA = 4. Hitunglah nilai cos $\angle BAC$.